古今数学思想

（第三册）

[美]莫里斯·克莱因　著

万伟勋　石生明　孙树本　等译

上海科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

古今数学思想. 第3册／(美)克莱因著；万伟勋等译. —上海：上海科学技术出版社，2002.8
ISBN 7-5323-6174-8

Ⅰ.古... Ⅱ.①克...②万... Ⅲ.数学史
Ⅳ.011

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第019462号

责任编辑 田廷彦 张 晨 静晓英

上海科学技术出版社出版发行
(上海瑞金二路450号 邮政编码200020)
常熟市兴达印刷有限公司印刷 新华书店上海发行所经销
2002年8月第1版 2002年8月第1次印刷
开本850×1168 1/32 印张12.375 字数301千
印数1—5 200 定价：34.00元

Mathematical Thought

from Ancient to Modern Times

Morris Kline

Oxford Univ. Press, New York, 1972

《古今数学思想》译者录

第一册(序,第 1 章至第 14 章):

江泽涵(序);张理京(第 1 章至第 10 章,第 13 章,第 14 章);张锦炎(第 11 章,第 12 章)

第二册(第 15 章至第 26 章):

申又枨(第 15 章,第 16 章);朱学贤(第 17 章,第 18 章,第 25 章);钱敏平(第 19 章);邓东皋(第 20 章);丁同仁(第 21 章);刘西垣(第 22 章);叶其孝(第 23 章,第 24 章);庄圻泰(第 26 章)

第三册(第 27 章至第 39 章):

庄圻泰(第 27 章);万伟勋(第 28 章至第 30 章);石生明(第 31 章至第 33 章);张顺燕(第 34 章);姜伯驹(第 35 章);孙树本(第 36 章,第 38 章,第 39 章);章学诚(第 37 章)

第四册(第 40 章至第 51 章):

叶其孝(第 40 章);程民德(第 41 章);朱学贤(第 42 章);张恭庆(第 43 章,第 44 章);邓东皋(第 45 章至第 47 章);章学诚(第 48 章);聂灵沼(第 49 章);江泽涵(第 50 章);吴光磊(第 51 章)

翻译说明

很多数学工作者、数学教师和数学爱好者早就希望能有一本比较简明的、阐述一些重要数学思想的来源和发展的书. 看到 Morris Kline 教授写的这本 *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (1972),我们感到相当满意,就组织人力把它翻译出来.

这本书内容丰富,全面论述了近代数学大部分分支的历史发展;篇幅不大,简明扼要. 正如书名所指出的,本书着重论述数学思想的古往今来,而不是单纯的史料传记,努力说明数学的意义是什么,各门数学之间以及数学和其他自然科学尤其是和力学、物理学的关系是怎样的. 本书厚今薄古,主要篇幅是叙述近二三百年的数学发展,着重在 19 世纪,有些分支写到 20 世纪 30 年代或 40 年代,作者对一些重要数学分支的历史发展,对一些著名数学家的评论,都很有一些独到的见解,并且写得很引人入胜. Morris Kline 教授本人深受格丁根大学数学传统的影响,注意研究数学史和数学教育,是一位著名的应用数学家和数学教育家,因此,他很能体会读者的心情,在书中能通过比较丰富的史料来阐述观点,把科目的历史叙述和内容介绍结合起来. 另外,为了方便读者,对许多古代的数学成就或资料都翻译成近代数学的语言,通俗易懂. 这些都是本书突出的优点.

当然,本书也有不足之处,例如忽视了我国的数学成就及其对

数学发展的影响，这对于论述数学的发展来说，无疑是有片面性的. 关于对现代数学高度抽象这一特征的看法，作者是持一定保留态度的，他的这种态度，给本书带来了某种倾向性，我们认为这是可以商榷的. 另外，关于数学中的有些问题，在历史上一直是争论不休的，而数学就在这种争论中发展着；作者的一些看法，也只是一家之言，还是值得研究的. 但是总的看来，本书仍不失为一本难得的好书. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1974, 9, Vol. **80**, No. 5:805～807 的书评文章说："就数学史而论，这是迄今为止最好的一本."

参加本书翻译的有张理京、江泽涵、张锦炎、申又枨、朱学贤、钱敏平、邓东皋、丁同仁、刘西垣、叶其孝、庄圻泰、万伟勋、石生明、张顺燕、姜伯驹、孙树本、章学诚、程民德、张恭庆、聂灵沼和吴光磊. 第一册是张理京校阅的；参加第二册校阅的有申又枨、江泽涵、冷生明；第三册主要由冷生明校阅，其中有一部分是张理京校阅的；第四册主要由申又枨、冷生明校阅. 另外，叶其孝、朱学贤参加校阅了全书的部分章节，并协同做了许多组织工作.

本书是在 1976 年初，由北京大学数学系的几位教授与部分教师，主要是申又枨、江泽涵、吴光磊、冷生明等建议组织翻译的. 当时主要目的是便于自己学习.

由于版权的关系，近经上海科学技术出版社向牛津大学出版社购得中文版权，才使这一中译本得到正式出版. 从开始翻译到现在，25 年过去了，Kline 教授和多位当年参加翻译的老一辈数学家相继去世，我们深深地怀念他们. 原书虽再没有新的版本，但其在国际上的影响仍然很大. 为了保证质量，冷生明曾对译稿进行了全面校勘，改正了许多误译和其他差错. 在原译本中，数以千计的人名、地名译法都不规范，为纠正这些错误，出版社的几位编辑也花费了大量心血. 另外，在本书的出版过程中，吴文俊教授给予很大的关怀与支持，我们表示衷心的感谢！

原书有51章，我们把译本分成四册出版.我们希望本书的翻译出版，能增进读者对数学史和数学本身的了解，对数学的教学改革以及对数学和数学史的研究有所裨益.限于水平，译文一定还有许多不妥甚至错误之处，欢迎读者批评指正.

邓东皋

2000.3.9.

序

如果我们想要预见数学的将来,适当的途径是研究这门科学的历史和现状.

Henri Poincaré

本书论述从古代一直到20世纪头几十年中的重大数学创造和发展.目的是介绍中心思想,特别着重于那些在数学历史的主要时期中逐渐冒出来并成为最突出的、并且对于促进和形成尔后的数学活动有影响的主流工作.本书所极度关心的还有:对数学本身的看法,不同时期中这种看法的改变,以及数学家对于他们自己的成就的理解.

必须把本书看作是历史的一个概述.当人们想到Euler的全集满满的约70卷,Cauchy的26卷,Gauss的12卷,人们就容易理解只凭本书一卷的篇幅不能给出一个详尽的叙述.本书的一些篇章只提出所涉及的领域中已经创造出来的数学的一些样本,可是我坚信这些样本最具有代表性.再者,为着把注意力始终集中于主要的思想,我引用定理或结果时,常常略去严格准确性所需要的次要条件.本书当然有它的局限性,但我相信它已给出整个历史的一种概貌.

本书的组织着重在居领导地位的数学课题,而不是数学家.数学的每一分支打上了它的奠基者的烙印,并且杰出的人物在确定数学的进程方面起决定性作用.但是,特意叙述的是他们的思想,传记完全是次要的.在这一点上,我遵循Pascal的意见:"当我们

援引作者时,我们是援引他们的证明,不是援引他们的姓名."

为使叙述连贯,特别是在1700年以后的时期,对于每一发展要等到它已经成熟、在数学中占重要地位并且产生影响的时候,我才进行论述.例如,我把非欧几里得几何放在19世纪介绍,虽然企图寻找欧几里得平行公理的替代物或证明早在Euclid时代就开始了并且继续不断.当然,有许多问题会在不同的时期反复提及.

为了不使资料漫无边际,我忽略了几种文化,例如中国的①、日本的和玛雅的文化,因为他们的工作对于数学思想的主流没有重大的影响.还有一些数学中的发展,例如概率论和差分演算,它们今天变得重要,但在所考虑的时期中并未起重要作用,从而也只得到很少的注意.这最后的几十年的大发展使我不得不在本书中只收入那些20世纪的,并且在该时期变成有特殊意义的创造.我没有在20世纪时期继续讨论像常微分方程或变分法的扩展,因为这将会需要很专门的资料,而它们只对于这些领域的研究工作者有兴趣,并且将会大大增加本书的篇幅.此外还考虑到,对于许多较新的发展的重要性,目前还不能作客观的估价.数学的历史告诉我们,许多科目曾经激起过很大的热情,并且得到最好的数学家的注意,但终于湮没无闻.我们只需要回忆一下Cayley的名言:射影几何就是全部几何,以及Sylvester的断言:代数不变量的理论已经总结了数学中的全部精华.确实的,历史给出答案的有趣问题之一便是:数学中哪些东西还生存着而未被淘汰?历史作出它自己的而且更可靠的评价.

通过几十项重要发展的即使是基础的叙述,也不能指望读者知道所有这些发展的内容.因此,我在本书中论述某科目的历史时,除去一些极初等的领域外,也说明科目的内容,把科目的历史

① 中国数学的历史的一个可喜的叙述,已见于Joseph Needham(李约瑟)的*Science and Civilization in China*,剑桥大学出版社,1959,卷3,第1～168页.

叙述和内容说明融和起来.对各种数学创造,这些说明也许不能把它们完全讲清楚,但应能使读者对它们的本质得到某些概念.从而,在某种程度上,本书也可作为一本从历史角度来讲解的数学入门书.这无疑是使读者能获得理解和鉴赏的最好的写法之一.

我希望本书对于专业的数学家和未来的数学家都有帮助.专业的数学家今天不得不把这么多的时间和精力倾注到他的专题上去,使得他没有机会去熟悉他的学科的历史.而实际上,这历史背景是重要的.现在的根深扎在过去,而对于寻求理解"现在之所以成为现在这样子"的人们来说,过去的每一事件都不是无关的.再者,虽然数学大树已经伸张出成百的分支,它毕竟是一个整体,并且有它自己的重大问题和目标.如果一些分支专题对于数学的心脏无所贡献,它们就不会开花结果.我们的被分裂的学科就面临着这种危险;跟这种危险作斗争的最稳妥的办法,也许就是要对于数学的过去成就、传统和目标得到一些知识,使得能把研究工作导入有成果的渠道.如同 Hilbert 所说的:"数学是一个有机体,它的生命力的一个必要条件是所有各部分的不可分离的结合."

对于学数学的学生来说,本书还会另有好处.通常一些课程所介绍的是一些似乎没有什么关系的数学片断.历史可以提供整个课程的概貌,不仅使课程的内容互相联系,而且使它们跟数学思想的主干也联系起来.

在一个基本方面,通常的一些数学课程也使人产生一种幻觉.它们给出一个系统的逻辑叙述,使人们有这种印象:数学家们几乎理所当然地从定理到定理,数学家能克服任何困难,并且这些课程完全经过锤炼,已成定局.学生被湮没在成串的定理中,特别是当他正开始学习这些课程的时候.

历史却形成对比.它教导我们,一个科目的发展是由汇集不同方面的成果点滴积累而成的.我们也知道,常常需要几十年,甚至几百年的努力才能迈出有意义的几步.不但这些科目并未锤炼成

无缝的天衣，就是那已经取得的成就，也常常只是一个开始，许多缺陷有待填补，或者真正重要的扩展还有待创造.

课本中的斟字酌句的叙述，未能表现出创造过程中的斗争、挫折，以及在建立一个可观的结构之前，数学家所经历的艰苦漫长的道路. 学生一旦认识到这一点，他将不仅获得真知灼见，还将获得顽强地追究他所攻问题的勇气，并且不会因为他自己的工作并非完美无缺而感到颓丧. 实在说，叙述数学家如何跌跤，如何在迷雾中摸索前进，并且如何零零碎碎地得到他们的成果，应能使搞研究工作的任一新手鼓起勇气.

为了使本书能包罗所涉及的这个大范围，我曾经试着选择最可靠的原始资料. 对于微积分以前的时期，像 T. L. Heath 的《希腊数学史》(*A History of Greek Mathematics*)无可否认地是第二手的资料，可是我并未只依靠这样的一个来源. 对于以后时期中的数学发展，通常都能直接查阅原论文；这些都幸而可以从期刊或杰出的数学家的全集中找到. 对研究工作的大量报道和概述也帮助了我，其中一些实际上也就在全集里. 对于所有的重要结果，我都试着给出出处. 但并没有对于所有的断言都这么做；否则将会使引证泛滥，浪费篇幅，而这些篇幅还不如用来充实报道.

每章中的参考书目指出资料来源. 如果读者有兴趣，他能从这些来源得到比本书中所说的更多的报道. 这些书目中还包括许多不应而且没有作为来源的文献. 把它们列在书目中，是因为它们供给额外的报道，或者表达的水平可以对一些读者更有帮助，或者它们比原始资料更易于找到.

在此，我想对我的同事 Martin Burrow, Bruce Chandler, Martin Davis, Donald Ludwig, Wilhelm Magnus, Carlos Moreno, Harold N. Shapiro 和 Marvin Tretkoff 表示谢意，感谢他们回答了大量的问题，阅读了本书的许多章节，提出了许多宝贵的批评意见. 我特别感激我的妻子 Helen，她以批评的眼光编辑我

的手稿，广泛地核对人名、日期和出处，而且极仔细地阅读尚未分成页的校样并给它们编上页码. Eleanore M. Gross 夫人做了大量的打字工作，对我是一个极大的帮助. 我想对牛津大学出版社的编辑部表示感激，感谢他们细心地印刷了本书.

Morris Kline
纽约 1972 年 5 月

目　　录

第 27 章

单复变函数

实域中两个真理之间的最短路程是通过复域.

Jacques Hadamard

1. 引　言

从技术观点来看,19 世纪最独特的创造是单复变函数的理论. 这个科目时常被称为函数论,虽然这个简称隐含有更多的意思. 这个新的数学分支统治了 19 世纪,几乎像微积分的直接扩展统治了 18 世纪那样. 函数论,这一最丰饶的数学分支,曾被称为这个世纪的数学享受. 它也曾被欢呼为抽象科学中最和谐的理论之一.

2. 复函数论的开始

我们已经看到,复数尤其是复函数是由于与部分分式积分法,确定负数与复数的对数,保形映射,以及实系数多项式的分解等相联系而实际进入数学的. 实际上 18 世纪的人们在复数及复函数方面所做的工作远不止此. D'Alembert 在他的流体力学论文《关于流体阻力的一个新理论试论》(*Essay on a New Theory of the Resistance of Fluids*, 1752)中,考虑了一个物体经过各向同性的、无重量理想流体的运动,联系这一研究,还考虑了下面的问题. 他想确定出两个函数 p 及 q,它们的微分是

(1) $$dq = Mdx + Ndy\ ,\ dp = Ndx - Mdy\ .$$

由于量 N 及 M 在 $\mathrm{d}p$ 和 $\mathrm{d}q$ 中都出现，故立即推知

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial q}{\partial y},\ \frac{\partial p}{\partial y}=-\frac{\partial q}{\partial x}. \tag{2}$$

这些方程现在称为 Cauchy-Riemann 方程. 方程(2)是说(第 19 章第 6 节) $q\mathrm{d}x+p\mathrm{d}y$ 和 $p\mathrm{d}x-q\mathrm{d}y$ 是某些函数的恰当微分. 于是表达式(我们将用 i 表示 $\sqrt{-1}$，虽然 Euler 只是偶尔这样用，到 Gauss 才成为普遍的用法.)

$$q\mathrm{d}x+p\mathrm{d}y+\mathrm{i}(p\mathrm{d}x-q\mathrm{d}y)=(q+\mathrm{i}p)\left(\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{i}}\right),$$

$$q\mathrm{d}x+p\mathrm{d}y-\mathrm{i}(p\mathrm{d}x-q\mathrm{d}y)=(q-\mathrm{i}p)\left(\mathrm{d}x-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{i}}\right)$$

也是完全微分，从而 $q+\mathrm{i}p$ 是 $x+y/\mathrm{i}$ 的函数，$q-\mathrm{i}p$ 是 $x-y/\mathrm{i}$ 的函数. D'Alembert 设

$$q+\mathrm{i}p=\xi\left(x+\frac{y}{\mathrm{i}}\right)+\mathrm{i}\zeta\left(x+\frac{y}{\mathrm{i}}\right), \tag{3}$$

$$q-\mathrm{i}p=\xi\left(x-\frac{y}{\mathrm{i}}\right)-\mathrm{i}\zeta\left(x-\frac{y}{\mathrm{i}}\right), \tag{4}$$

其中 ξ 和 ζ 是有待于确定的函数，在特殊的情形下，d'Alembert 曾把它们确定出来. 将(3)及(4)相加并相减，他得出 p 和 q. 这一点的意义是表明了 p 和 q 是一个复函数的实部及虚部.

Euler 指出了如何利用复函数去计算实积分的值. 从 1776 年起到 1783 年逝世时止，他写了一系列论文，这些论文从 1788 年起开始发表. 其中有两篇是在 1793 年和 1797 年①发表的. Euler 指出：z 的任一函数，若对 $z=x+\mathrm{i}y$ 具有形式 $M+\mathrm{i}N$，其中 M, N 为实函数，那么它对于 $z=x-\mathrm{i}y$，就具有形式 $M-\mathrm{i}N$. 他说，这是复数的基本定理. 他利用这个断言去求实积分的值.

假定

① *Nova Acta Acad. Sci. Petrop.*, 7, 1789, 99～133, pub. 1793 = *Opera*, (1), 19, 1～44; *ibid.*, 10, 1792, 3～19, pub. 1797 = *Opera*, (1), 19, 268～286.

(5) $$\int Z(z)\mathrm{d}z = V,$$

其中 z 是实的. 他令 $z = x + \mathrm{i}y$, 从而 V 变为 $P + \mathrm{i}Q$. 于是

(6) $$P + \mathrm{i}Q = \int (M + \mathrm{i}N)(\mathrm{d}x + \mathrm{i}\mathrm{d}y),$$

其中 $M + \mathrm{i}N$ 现在是 $Z(z)$的复形式. 根据他的基本断言,

(7) $$P - \mathrm{i}Q = \int (M - \mathrm{i}N)(\mathrm{d}x - \mathrm{i}\mathrm{d}y),$$

所以将实部及虚部分开,就有

(8) $$P = \int M\mathrm{d}x - N\mathrm{d}y,\ Q = \int N\mathrm{d}x + M\mathrm{d}y.$$

于是, $M\mathrm{d}x - N\mathrm{d}y$ 与 $N\mathrm{d}x + M\mathrm{d}y$ 分别是 P 与 Q 的恰当微分,随之有

(9) $$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{\partial N}{\partial x},\ \frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial x}.$$

这样在 $Z(z)$中代入 $z = x + \mathrm{i}y$,"就得到两个函数 M 和 N,它们具有值得注意的性质: $\partial M/\partial y = -\partial N/\partial x$, $\partial M/\partial x = \partial N/\partial y$; P 与 Q 也有类似的性质". 这里 Euler 强调了一个复函数的实部和虚部即 M 和 N,满足 Cauchy-Riemann 方程. 但是,他的主要点是利用积分(8)去计算(5),因为 P 等于原来的 V. 为将(8)中的积分化为一元函数的积分,Euler 在(5)中把 $z = x + \mathrm{i}y$ 换为 $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$, 并保持 θ 不变. 事实上这就是沿着复平面上过原点的一条射线积分. 然后他用他的方法去求一些积分的值.

Laplace 也使用了复函数去求积分的值. 在从 1782 年起到他的名著《概率的分析理论》(*Théorie analytique des probabilités*, 1812)为止的一系列论文中,他像 Euler 那样,把实积分转换为复积分来计算实积分的值. Laplace 要求优先权,因为 Euler 的论文发表得比他晚. 不过,即使是上面提到的 1793 年和 1797 年的论文,就已在 1777 年 3 月在彼得堡科学院宣读过. 在这一工作中 Laplace 附带地引进了我们现在称之为解微分方程的 Laplace 变

换方法.

Euler, d'Alembert 和 Laplace 的工作构成了函数论的重要进展.不过,在他们的工作中有一个本质的局限性,他们依靠把 $f(x+\mathrm{i}y)$ 的实部和虚部分开来进行他们的分析工作.复函数实际上不是基本的实体.显然,这些人对于使用复函数还感觉到很不自然.Laplace 在他 1812 年的书中指出:"这个由实到虚的过渡可以看作是一个启发式的方法,它像长期以来数学家所用的归纳法.但是,如果十分谨慎地有约束地使用这个方法,那么所得到的结果总是可以证明的."他的确强调,结果都必须验证.

3. 复数的几何表示

使单复变函数理论的建立更为直觉合理的一个重要步骤是复数及其代数运算的几何表示.许多人——Cotes, De Moivre, Euler,以及 Vandermonde——确实曾把复数看作是平面上的点,这可以由下述事实来说明:当他们解方程 $x^n-1=0$ 的时候,他们都把这些解

$$\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}$$

看作是一个正多边形的顶点.例如,Euler 把 x 和 y 几何地设想为坐标平面上的点,用 $x+\mathrm{i}y$ 代替 x 和 y,然后将 $x+\mathrm{i}y$ 表为 $r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$,再将 r 和 θ 作为极坐标画出来.因此可以说复数作为平面上点的坐标的表示法在 1800 年就已经知道了.不过,没有作出两者的决定性的同一化,也没有给出复数的代数运算的任何几何意义.还缺少把 $x+\mathrm{i}y$

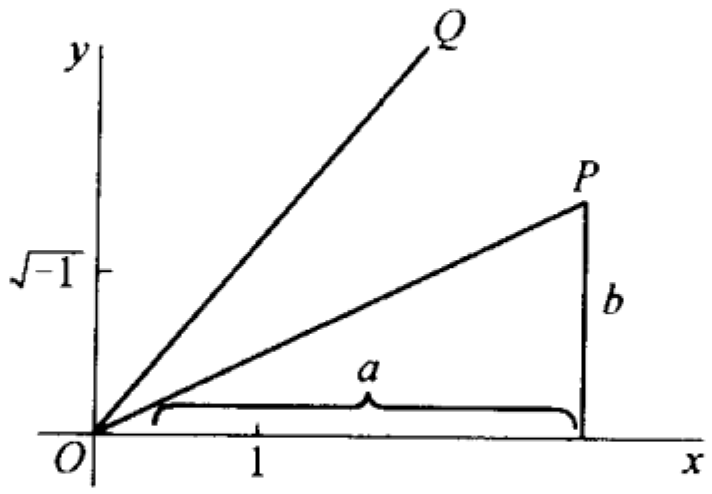


图 27.1

的复函数 $u+iv$ 的值用另一个平面的点来表示的想法.

1797 年,挪威出生的自学的测量员 Caspar Wessel(1745—1818)写了一篇论文,题目是《关于方向的分析表示;一个尝试》,这篇论文刊载在丹麦皇家科学院 1799 年的论文集中. Wessel 企图几何地表示出有向线段(向量)以及它们的运算. 在这篇论文中,除寻常的具有实单位 1 的 x 轴外,他同时引进了一根虚轴,以 $\sqrt{-1}$(他把 $\sqrt{-1}$ 写为 ϵ)作为单位. 在 Wessel 的几何表示法中,向量 OP(图 27.1)是在具有单位 $+1$ 及 $\sqrt{-1}$ 的平面上从原点 O 画出线段 OP,这向量用复数 $a+b\sqrt{-1}$ 表示. 类似地,向量 OQ 是线段 OQ,且是用另一数 $c+d\sqrt{-1}$ 表示.

然后 Wessel 利用以几何术语定义的复数运算来定义向量的运算. 他给出的四种运算的定义实际上就是我们今天所学习的. 例如 $a+bi$ 与 $c+di$ 的和是相邻两边 OP 与 OQ 所决定的平行四边形的对角线. $a+bi$ 与 $c+di$ 的积是一个新的向量 OR,使得 OR 与 OQ 的比等于 OP 与实单位之比,而 OR 与 x 轴的夹角是 OP 及 OQ 与 x 轴的夹角之和. 显然,与其说 Wessel 将复数与平面上的点相联系,还不如说他想的是将平面上的点用向量表示. 他把他的向量几何表示法用于几何问题与三角问题. Wessel 的论文尽管有巨大的价值,但一直未被注意,直到 1897 年译成法文重新发表,才被人们重视.

瑞士人 Jean-Robert Argand(1768—1822)给出了复数的一个

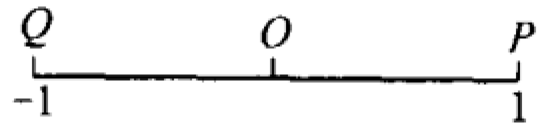


图 27.2

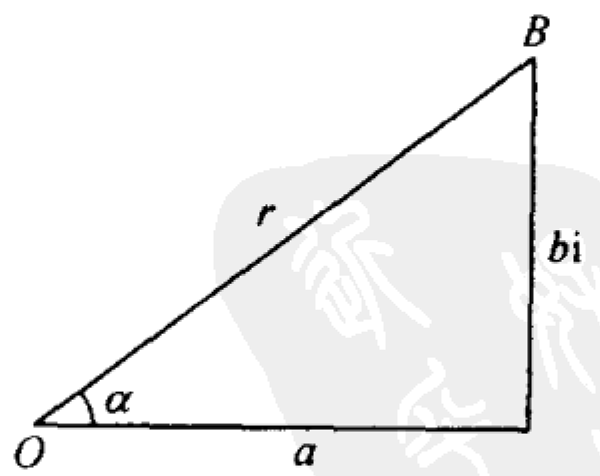


图 27.3

稍微不同的几何解释. Argand 也是自学的,并且是一个簿记员,他曾出版了一本小书《试论几何作图中虚量的表示法》(*Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*, 1806)①. 他注意到负数是正数的一个扩张,它是将方向与大小结合起来得出的. 于是他问,我们能否利用增添某种新的概念来扩张实数系? 考虑序列 1, x, -1, 我们能否找到一种运算,将 1 转变为 x,再把它应用到 x 上又将 x 转变为 -1? 如果将 OP(图 27.2)按反时针方向绕 O 转动 90°,然后重复这个转动,我们就确实由于两次重复一个运算而由 P 到了 Q. 但是,Argand 注意到,这正是以$\sqrt{-1}$乘 1,然后又以$\sqrt{-1}$乘此乘积时所发生的事情,即得到 -1. 所以我们可以把$\sqrt{-1}$看成是按反时针方向转过 90°的旋转,而$-\sqrt{-1}$是顺时针方向转过 90°的旋转.

利用复数的这个运算意义,Argand 决定,由原点出发的一个典型线段 OB(图 27.3,他称它为有向线)应表为 $r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, 其中 r 为长度. 他也把复数 $a+bi$ 看作是符号化了 a 及 bi 的几何结合 OB. Argand 像 Wessel 一样,指出如何将复数几何地相加或相乘,并应用这些几何想法去证明三角、几何及代数的定理. 虽然 Argand 的书在复数的几何解释方面惹起一些争论,但这是他对数学所作的唯一贡献,他的工作没有多大的冲击,然而我们现在仍然讲 Argand 图解.

在使人们接受复数方面,Gauss 做得更为有效. 他在代数基本定理的几个证明中,用了复数(第 25 章第 2 节). 在前三个证明中(1799,1815 及 1816),他预先假定了直角坐标平面上的点与复数的一一对应. 这里没有实际画出 $x+iy$, 而是将 x 和 y 作为平面上

---

① 一批论 Argand 以及其他作者的关于复数几何表示的思想的文章,可以在 Gergonne 的 *Annales des Mathématiques* 的第四卷(1813—1814)和第五卷(1814—1815)中找到.

一点的坐标. 此外,在证明中并没有真正用到复函数理论,因为他将涉及到的函数分为实部和虚部. 他在 1811① 年给 Bessel 的一封信中说得更明显,他说 $a+bi$ 用点 (a, b) 表示,并说在复平面上可以沿着许多路径从一点到另一点. 毫无疑问,从三个证明及其他未发表的工作(其中有一些我们随后就要讨论)中所表现出来的思想,可以判断 1815 年 Gauss 已完全掌握了复数及复函数的几何理论,虽然在 1825 年的一封信中他确实说了"$\sqrt{-1}$的真正奥妙是难以捉摸的".

然而,如果说 Gauss 仍旧有任何顾虑的话,那他在 1831 年前后已经克服了它们,他公开描述了复数的几何表示. Gauss 在为他的论文《双二次剩余理论》所作的第二个说明②中以及在他为 1831 年 4 月 23 日的《格丁根学报》(*Göttingische gelehrte Anzeigen*)所写的这篇论文的"摘要"中③,他对复数的几何表示是很清楚的. 在论文的第 38 节中他不仅将 $a+bi$ 表示为复平面上一点(不像 Wessel 和 Argand 那样表示为一向量),而且阐述了复数的几何加法与乘法. 在"摘要"④中 Gauss 说,双二次剩余理论进入复数域可能会扰乱了不熟悉这些数的人们,并且可能使他们对剩余理论有不确定的印象. 所以他重复了他在这篇论文中对复数的几何表示所说的话. 然后他指出,虽然现在对于分数、负数及实数都已很好地理解了,但对于复数只是抱了一种容忍的态度,而不顾它们的巨大价值. 对于许多人来说,它们不过是一种符号游戏. 但是在这个几何表示中人们可以看到"**复数的直观意义已完全建立起来并且不需要再增加什么就可以在算术领域中采用这些量**[着重号是添加的]."他还说,如果 1, -1 和 $\sqrt{-1}$ 原来

① *Werke*, 8,90~92.

② *Comm, Soc. Gott.*, 3, 1832 = *Werke*, 2,95~148;这篇论文的主要内容将在第 34 章第 2 节中讨论.

③ *Werke*, 2,169~178.

④ *Werke*, 2,174 ff.

不称为正、负和虚单位而称为直、反和侧单位，那么人们对这些数就可能不会产生一些阴暗神秘的印象. 他说几何表示使人们对虚数真正有一个新的看法. 他引进术语“复数”①以与虚数相对立，并用 i 代替 $\sqrt{-1}$.

4. 复函数论的基础

Gauss 还引进了有关单复变函数的一些基本概念. 在 1811 年给 Bessel 的信中②，针对 Bessel 的一篇关于对数积分 $\int dx/x$ 的论文，Gauss 指出将虚(复)的积分限考虑进去的必要性. 然后他问："当上限为 $a+bi$ 时 $\int \phi(x)dx$ $\left(\text{Gauss 写为} \int \phi x \cdot dx\right)$ 的意义应当是什么？显然，如果要求有清楚的概念，那就必须假定 x 取小的增量，从使积分为零的 x 值到 $a+bi$ 这个 x 值，然后将所有的 $\phi(x)dx$ 加起来……但是在复平面上从 x 的一个值到另一个值的连续过程发生在一条曲线上，所以通过许多条路径是可能的. 现在我断言积分 $\int \phi(x)dx$ 只有一个值，即使是通过不同的路径，只要在两条路径所围的空间内 $\phi(x)$ 是单值的，并且不变为无穷. 这是一个很美丽的定理，它的证明并不难，我将在一个适当的机会给出这证明."Gauss 没有给出这个证明. 他还断言，如果 $\phi(x)$ 变为无穷，那么 $\int \phi(x)dx$ 可以有许多值，取决于所取的闭路径围绕 $\phi(x)$ 变为无穷的点一次、二次或更多次.

然后 Gauss 回到 $\int dx/x$ 的特殊情形并且说，从 $x=1$ 出发，走到某一个值 $a+bi$，如果路径不包围 $x=0$，就得出积分的唯一的一个值；但是如果路径包围 $x=0$，那么就必须对从 $x=1$ 到 $a+bi$

---

① *Werke*, 2, 102.

② *Werke*, 8, 90～92.

不包围 $x=0$ 的路径所得之值加上 $2\pi i$ 或 $-2\pi i$. 这样，对于一个已给的 $a+bi$，就有许多对数. 随后在这信中，Gauss 说复变函数的积分的研究应引导到最有趣的结果. 所以，甚至在 Gauss 发表他的代数基本定理的第二及第三个证明以前——在其中，像在第一个证明中一样，他避免直接应用复数及复函数，除去偶然一次写出 $a+b\sqrt{-1}$ 以外——他对于复函数及其积分已有很明确的概念.

Poisson 在 1815 年注意到并且在 1820 年的一篇论文[①]中讨论了，沿着复平面上的路径所取的复函数的积分的用处. 作为一个例子，他给出了

$$\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x}. \tag{10}$$

在这里他令 $x=e^{i\theta}$，其中 θ 由 $(2n+1)\pi$ 变到 0，并且，将积分作为一个和数的极限处理，得到值 $-(2n+1)\pi i$.

于是他指出，一个积分，沿着一条虚路径同沿着一条实路径，其值不一定相同. 他给出了例子

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos ax}{b^2+x^2}\mathrm{d}x, \tag{11}$$

其中 a 和 b 是正的常数. 他令 $x=t+ik$，其中 k 是常数且是正的，对于 $k>b$，他得到 $\pi(e^{-ab}-e^{ab})/2\pi$，而当 $k<b$ 时，得 πe^{-ab}. 第二个值对于 $k=0$ 也是正确的. 所以对于 k 的两个不同的值(意味着两条不同的路径)，就得到两个不同的结果. Poisson 是第一个沿着复平面上的路径实行积分的人.

虽然 Gauss 和 Poisson 的这些观察的确是重要的，但他们都没有发表过较重要的关于复函数理论的文章. 这个理论是 Augustin-Louis Cauchy 建立的. 1789 年，他生于巴黎，于 1805 年进入多科工艺学校，在那儿他学习工程. 由于他的健康情况很差，

---

① *Jour. de l'Ecole Poly.*, 11, 1820, 295～341.

Lagrange和 Laplace 就劝他献身于数学. 他担任了多科工艺学校、巴黎大学及法兰西学院的教授. 政治对于他的经历发生了意料不到的影响. 他是一个热心的保皇党员,并且是 Bourbons 家族的支持者. 1830 年,当 Bourbons 家族的一个远支统治法国时,他拒绝发誓效忠于新君主政体,并且辞去了多科工艺学校的教授职位. 他出走到都灵,教了几年拉丁文和意大利文. 1838 年他回到巴黎,在那里当了几个教会机构的教授,一直到 1848 年的革命以后的政府废弃了效忠的誓言. 1848 年 Cauchy 主持了巴黎大学理学院(Faculté des Sciences of the Sorbonne)的数学天文学讲座. 虽然 Napoleon 三世在 1852 年恢复了誓言,但他允许 Cauchy 拒绝宣誓. 对于皇帝的屈尊姿态,他的回答是捐赠他的薪金给他曾住过的地方索(Sceaux)的穷人. Cauchy 是一个令人钦佩的教授和一位最伟大的数学家,他于 1857 年去世.

Cauchy 具有广泛的兴趣. 他熟悉他那时代的诗歌并且是一本关于 Hebrew 作诗法著作的作者. 在数学方面他写的论文超过 700 篇,仅次于 Euler. 他的全集的近代版有 26 卷,包含数学的一切分支. 在力学方面,他写了关于杆和弹性膜的平衡以及关于弹性介质中的波等重要著作. 在光的理论中,他研究了 Fresnel 开创的波的理论及光的散射和极化. 他大大地发展了行列式的理论,建立了常微分方程和偏微分方程的一些基本定理.

在复函数理论方面,Cauchy 的第一篇重要论文是他的《关于定积分理论的报告》(Mémoire sur la théorie des intégrales définies). 这篇论文 1814 年宣读于巴黎科学院. 但直到 1825 年才送去发表,在 1827 年出版①. 出版时 Cauchy 增加了两个注解,相当可靠地反映了 1814 年到 1825 年间的发展和在这个期间 Gauss 的工作的可能影响. 现在我们来看一下这篇论文本身. 在序言中

① *Mém. des sav. étrangers*, (2),1,1827, 599 ~ 799 = *Œuvres*, (1),1,319 ~ 506.

Cauchy 说,他被引导到这个工作中来,是因为他致力于严密化如下过程中由实到复的过渡,这过程是 Euler 从 1759 年起以及 Laplace从 1782 年起用来计算定积分的值的. 事实上,Cauchy 引证了 Laplace 的工作,后者注意到方法需要严密化. 但论文本身并没有处理这个问题,它处理了在流体力学研究中出现的二重积分的更换积分次序的问题. Euler 曾在 1770 年①说过,当积分号下每个变量的限彼此无关的时候,这个次序更换是允许的,至于 Laplace,他显然是同意的,因为他屡次用了这个事实.

具体说,Cauchy 处理了关系式

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} f(x,\ y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{y_0}^{Y}\int_{x_0}^{X} f(x,\ y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{12}$$

其中 x_0, y_0, X, Y 都是常数(图 27.4). 当 $f(x,\ y)$在区域的内部及边界上是连续的时候,这个积分次序更换成立. 然后他引进了两个函数 $V(x,\ y)$与 $S(x,\ y)$,使得

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial x},\qquad \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial S}{\partial y}. \tag{13}$$

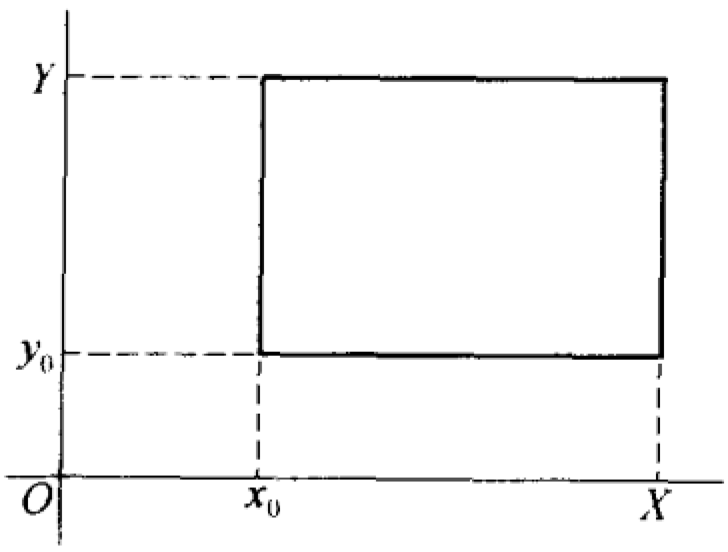


图 27.4

Euler 在 1777 年就已经指出如何得到这样的函数(见参考书目 [5], [8], [9]). 现在 Cauchy 考虑一个由 $\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial x}$ 给出的 $f(x,\ y)$. 将(12)的左边 f 换为$\partial V/\partial y$,在右边将 f 换为$\partial S/\partial x$. 于是有

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} \frac{\partial V}{\partial y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{y_0}^{Y}\int_{x_0}^{X} \frac{\partial S}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{14}$$

而用(13)中第二个方程,他便得到

① *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 14,1769,72～103,pub. 1770 = *Opera*, (1),17,289～315.

$$(15)\qquad \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\frac{\partial S}{\partial y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x=-\int_{y_0}^{Y}\int_{x_0}^{X}\frac{\partial V}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

这些等式可以用来在任一次序下计算二重积分的值.不过它们并不涉及复函数.当 Cauchy 在他的引言①中说,他将"严格地并且直接地建立由实到虚(复)的过渡"时,他心中想的是方程(13).Cauchy 说②这两个方程包含了由实到虚的过渡的全部理论.

上述一切都是在 1814 年的论文的正文中,而且确实没有明显指出复函数理论怎样被包括在内.另外,虽然 Cauchy 按照 Euler 与 Laplace 的同一方式,用复函数来计算实定积分的值,但是这个用法并未把复函数作为基本实体.一直到 1821 年,在他的《分析教程》(*Cours d'analyse*)中③,他说

$$\cos a+\sqrt{-1}\sin a,$$
$$\cos b+\sqrt{-1}\sin b,$$
$$\cos(a+b)+\sqrt{-1}\sin(a+b)$$

"是三个符号式,它们不能按照一般已建立的常规来解释,并且不代表任何实的东西."他说,上面的第一与第二式的乘积等于第三式这一事实,并不具有什么意义.为了使这个方程具有意义,必须令实部与$\sqrt{-1}$的系数相等."每一个虚方程仅仅是实量间的两个方程的符号表示."如果我们按照对实量建立的法则来对复式进行运算,我们得到时常是重要的准确结果.

在这本书里他确实处理了复数及复变数 $u+\sqrt{-1}v$,其中 u 及 v 是一个实变数的函数,不过总是这样理解,即两个实的部分是它们的有意义内容.一个复变数的复值函数没有被考虑.

在 1822 这一年,Cauchy 前进了几步.从关系式(14)和(15)他有

① *Œuvres*,(1),1,330.
② *Œuvres*,(1),1,338.
③ *Œuvres*,(2),3,154.

$$(16)\int_{x_0}^{X}[V(x,Y)-V(x,y_0)]\mathrm{d}x=\int_{y_0}^{Y}[S(X,y)-S(x_0,y)]\mathrm{d}y,$$

$$(17)\int_{x_0}^{X}[S(x,Y)-S(x,y_0)]\mathrm{d}x=-\int_{y_0}^{Y}[V(X,y)-V(x_0,y)]\mathrm{d}y.$$

现在他有了可以把这两个方程结合起来的想法,因此作出了关于 $F(z)=F(x+\mathrm{i}y)=S+\mathrm{i}V$ 的一个陈述.例如,他以 i 乘(16)并将两方程相加,得到

$$\int_{x_0}^{X}F(x+\mathrm{i}Y)\mathrm{d}x-\int_{x_0}^{X}F(x+\mathrm{i}y_0)\mathrm{d}x=\int_{y_0}^{Y}F(X+\mathrm{i}y)\mathrm{i}\mathrm{d}y-\int_{y_0}^{Y}F(x_0+\mathrm{i}y)\mathrm{i}\mathrm{d}y,$$

整理后,就给出

$$(18)\int_{y_0}^{Y}F(x_0+\mathrm{i}y)\mathrm{i}\mathrm{d}y+\int_{x_0}^{X}F(x+\mathrm{i}Y)\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{X}F(x+\mathrm{i}y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{Y}F(X+\mathrm{i}y)\mathrm{i}\mathrm{d}y.$$

最后这个结果是沿着一个长方形边界(图 27.4)的复积分法这一简单情形下的 Cauchy 积分定理.这个结果可以表示为

$$(19)\qquad \int_{ADC}F(z)\mathrm{d}z=\int_{ABC}F(z)\mathrm{d}z.$$

即是说,积分与路径无关.

以上这些想法,是 Cauchy 在 1822 年的一个注解中,在他《关于无穷小计算课程的总结》[①] (*Résumé des le, ons sur le calcul infinitésimal*)中,并且在 1827 年发表的 1814 年的论文的一个脚注中给出的.从这些较晚的著作,我们看到 Cauchy 是怎样从实函数到复函数的.

1825 年,Cauchy 写了另一篇论文《关于积分限为虚数的定积

① = *Œuvres*(2), 4, 13 ~ 256.

分的报告》,但这篇文章到1874年才发表①.这篇论文被许多人看作是他的最重要的论文,并且是科学史上最瑰丽的一篇,虽然在一段时间内 Cauchy 本人并没有赏识到它的价值.

在这篇论文中,他又考虑了将常数及变数用复值代替的方法来计算实积分的问题.他处理了

$$\int_{x_0+\mathrm{i}y_0}^{X+\mathrm{i}Y} f(z)\mathrm{d}z, \tag{20}$$

其中 $z = x + \mathrm{i}y$,并且小心地定义这个积分为和数

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} f(x_\nu + \mathrm{i}y_\nu)[(x_{\nu+1} - x_\nu) + \mathrm{i}(y_{\nu+1} - y_\nu)]$$

的极限,其中 $x_0, x_1, \cdots, X$ 以及 $y_0, y_1, \cdots, Y$ 是沿着从(x_0, y_0)到(X, Y)的路径的分划点.这里 $x + \mathrm{i}y$ 肯定是复平面上的一个点并且积分是沿着一条复的路径的.他还证明,如果令 $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$,其中 t 是实的,那么结果与 ϕ 和 ψ 的选择无关,也就是说,与路径无关,条件是在两条不同的路径之间没有 $f(z)$的间断点.这个结果普遍化了对于矩形成立的结果.

Cauchy 正式叙述他的定理如下:若 $f(x+\mathrm{i}y)$对于 $x_0 \leqslant x \leqslant X$ 和 $y_0 \leqslant y \leqslant Y$ 为有穷并连续,那么积分(20)的值与函数 $x = \phi(t)$ 和 $y = \psi(t)$ 的形式无关.他证明这条定理用了变分的方法.他考虑了一条可供选择的路径 $\phi(t) + \varepsilon u(t)$, $\psi(t) + \varepsilon v(t)$,并且证明积分对于 ε 的第一变分等于零.这个证明并不令人满意.在其中 Cauchy 不仅用了 $f(z)$的导数的存在性,而且还用了导数的连续性,但他在定理的叙述中并没有作任何假定.对这一点的解释是,Cauchy 相信一个连续函数总是可微的,而导数只能在函数本身不连续的地方才不连续.Cauchy 的信念是有道理的,因为在他的工作的早期,他和18世纪和19世纪初期的其他的人一样,都把函数理解为一个解析表达式,因而导数立即可以通过惯用的形式微分

① *Bull. des Sci. Math.*, 7,1874,265～304, 与 8,1875,43～55,148～159;这篇论文未收入 Cauchy 的论文集.

法则得出.

在 1825 年的论文中,Cauchy 对于他在 1814 年的论文中以及在该论文的一个脚注里已经接触到的一个较重要的概念看得较清楚些了. 他考虑当 $f(z)$在矩形(图 27.4)的内部或边界上不连续时,将发生什么事情. 这时沿着两条不同路径的积分的值可能不同. 如果在 $z_1 = a + ib$ 处,$f(z)$为无穷,但极限

$$F = \lim_{z \to z_1}(z - z_1)f(z)$$

存在,也就是说,在 z_1 处 f 有一个单极点,那么积分的差是 $\pm 2\pi\sqrt{-1}F$. 例如对于函数 $f(z) = 1/(1+z^2)$,它在 $z=\sqrt{-1}$ 处为无穷,因而 $a = 0, b = 1$, 而

$$(21) \qquad F = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 1}} \frac{x + (y-1)\sqrt{-1}}{[x + (y+1)\sqrt{-1}][x + (y-1)\sqrt{-1}]} = \frac{-\sqrt{-1}}{2}.$$

Cauchy 在他的《数学练习》[①] (*Exercices de mathématique*)中,把量 F 本身称为**积分留数**. 另外,当一个函数在两条积分路径所围的区域内有几个极点时,Cauchy 指出,必须取留数之和来得到沿着两条路径的积分之差. 在这个关于留数的特别的一节中,他的两条路径仍构成一个矩形,但他取了很大的一个,并让边长变为无穷,使所有的留数都包含在内.

在《练习》[②] 中,Cauchy 指出 $f(z)$在 z_1 的留数也是 $f(z)$展为 $z - z_1$ 的幂级数展开式中项 $(z - z_1)^{-1}$ 的系数. 很久以后,在 1841 年的一篇论文[③] 中,Cauchy 给出了在一个极点的留数的一个新的表达式,即

$$F(z_1) = E[f(z)]_{z_1} = \frac{1}{2\pi i}\int f(z)dz,$$

---

① Four vols., 1826～1830 = *Œuvres*, (2), 6～9.

② Vol. 1, 1826, 23～37 = *Œuvres*, (2), 6, 23～37.

③ *Exercices d'analyse et de physique mathématique*, Vol. 2, 1841, 48～112 = *Œuvres*, (2), 12, 48～112.

其中积分是沿着一个包含 $z=z_1$ 的小圆取的. 留数的概念及发展是 Cauchy 的一个重要贡献. 到此为止,他所给出的所有结果的直接应用都是计算定积分的值.

从 Cauchy 在他 1814 年论文的脚注中增加的内容以及 1825 年杰出的论文中写的东西,显然看出,他一定是通过长期而刻苦的思考才认识到,引进复量以后,实函数对之间的一些关系就获得它们的最简单的形式. 至于他从 Gauss 和 Poisson 的工作中究竟学到了多少东西那是不知道的.

在 1830 年到 1838 年间,当他住在都灵及布拉格时,他发表的工作是不连贯的. 在他的《分析与数学物理练习》(*Exercices d'analyse et de physique mathématique*,四卷,1840—1847)中,他引用了这些工作,且将其中的大部分重新刊入.

在 1831 年写成的发表较晚的一篇论文中①,他得到下述定理:函数 $f(z)$ 可以按照 Maclaurin 公式展成为一个幂级数,它对所有这样的 z 收敛,即 z 的绝对值小于那些使函数或其导数不为有穷或不为连续的 z.(在那时 Cauchy 所知道的奇点仅仅是我们现在称为极点的奇点.)他证明这个级数逐项按绝对值小于一个收敛的几何级数,其和数为

$$\frac{Z}{Z-z}\overline{f(z)},$$

其中 Z 是使 $f(z)$ 不连续的第一个值,$\overline{f(z)}$ 是就所有绝对值等于 $|Z|$ 的 z 而言 $|f(z)|$ 的最大值. 这样 Cauchy 就给出了函数可展为 Maclaurin 级数的一个有力的便于应用的判别法则,它用了一个现在称为强级数的比较级数.

在定理的证明中,他首先证明

① *Comp. Rend.*, 4., 1837, 216～218 = *Œuvres*, (1), 4, 38～42;亦见 *Exercices d'analyse et de physique mathématique*, Vol. 2, 1841, 48～112 = *Œuvres*, (2), 12, 48～112.

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\bar{z}f(\bar{z})}{\bar{z}-z}\mathrm{d}\phi,$$

其中 $\bar{z}=|Z|e^{i\phi}$. 这个结果实际上就是我们现在所称的 Cauchy 积分公式. 然后他将分式 $\bar{z}/(\bar{z}-z)$ 展为 $z/\bar{z}$ 的幂的几何级数并证明了定理本身.

在这个定理中 Cauchy 还假定了由函数本身的连续性必然推出导数的存在性及连续性. 在他把这个材料重新写在他的《练习》中的时候,他曾与 Liouville 和 Sturm 通信并对以上定理的叙述增加了这样一句话,即收敛区域止于使函数及其导数不再为有穷或连续的 z 的那个值. 但他还是没有确信必须对导数加些条件,而且在后来的工作中他把它们删掉了.

在另一篇比较重要的关于复函数论的论文《关于伸展到一个闭曲线的所有的点的积分》①中,Cauchy 将[解析的] $f(z)=u+iv$ 沿着一个[单连通]区域边界曲线的积分和展布在这个区域上的积分联系起来. 若 u, v 是 x, y 的函数,则

$$\text{(22)}\qquad \begin{aligned}\iint\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int u\mathrm{d}y+\int v\mathrm{d}x,\\ \iint\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int(-u\mathrm{d}x)+\int v\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

其中二重积分展布在区域上,而单积分沿着边界曲线. 现在,考虑到 Cauchy-Riemann 方程(见参考书目[13]),左边等于 0,两个等式的右边就是出现在

$$\int f(z)\,\mathrm{d}z=\int(u+\mathrm{i}v)(\mathrm{d}x+\mathrm{i}\mathrm{d}y)=\int(u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y)+\mathrm{i}\int(u\mathrm{d}y+v\mathrm{d}x)$$

中的积分. 所以 $\int f(z)\mathrm{d}z=0$, 因而 Cauchy 得到了与路径无关的基本定理的一个新证明. 他对一个矩形证明了这定理,然后,推广到不自交的闭曲线. (这个定理 Weierstrass 在 1842 年也独立地得

① *Comp. Rend.*, 23, 1846, 251 ~ 255 = *Œuvres*, (1), 10, 70 ~ 74.

到.)Cauchy 是否学习了 Green 1828 年的工作(第 28 章第 4 节)才得到他早期的一些概念的比较丰饶的公式表示,这点是不能肯定的,但这样的征兆是有的,因为 Cauchy 将以上结果推广到了曲面上的区域.

在以上提到的 1846 年论文和同一年的另一篇论文①中,Cauchy 改变了他对复函数的观点,与他 1814,1825 及 1826 年的工作相对立.现在他关心的不再是实积分及其计值,而转到复函数理论本身,并为这个理论建立基础.在 1846 年的第二篇论文中,他给出了关于沿着一条任意闭曲线的积分 $\int f(z)\mathrm{d}z$ 的一个新的叙述:如果曲线包围着一些极点,那么积分的值是函数在这些极点上的留数之和的 $2\pi\mathrm{i}$ 倍.就是说

$$\int f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}E[f(z)], \tag{23}$$

其中 $E[f(z)]$ 是他用以表示留数之和的记号.

他还着手处理了多值函数的积分.②论文的第一部分(其中他处理了单值函数的积分)叙述的内容并不比 Gauss 在给 Bessel 的信中关于 $\int \mathrm{d}x/x$ 或 $\int \mathrm{d}x/(1+x^2)$ 所指出的更多.这些积分确是多值的,而且它们的值与积分路径有关.

但 Cauchy 更进一步考虑积分号下的多值函数.在这篇论文中他说,如果被积函数是一个代数方程或超越方程的根,例如 $\int w^3\mathrm{d}z$(其中 $w^3 = z$),且如果沿着一条闭路径积分并又回到起点,那么被积函数现在就表示另外一个根.在这些情形中沿着闭路径积分的值依赖于起点;而沿着路径的延拓产生积分的不同的值.

---

① "Sur les intégrales dans lesquelles la fonction sous le signe $\int$ change brusquement de valeur," *Comp. Rend.*, 23,1846, 537 与 557～569 = *Œuvres*, (1),10, 133～134 与 135～143.

② "Considérations nouvelles sur les intégrales définies qui s'étendent à tous les points d'une courbe fermée," *Comp. Rend.*, 23,1846, 689～702 = *Œuvres*, (1),10, 153～168.

但若环绕路径充分多次使 w 回到它的原始值，那么积分的值将重复出现，因而积分是 z 的一个周期函数. 积分的**周期模**(*indices de périodicité*)不再像单值函数的情形那样，可以用留数表示了. Cauchy 关于多值函数的积分的概念依然是模糊的.

自 1821 年以后，差不多 25 年中，Cauchy 单独一人发展了复函数理论. 1843 年他的同国人才开始继续他的工作. Pierre-Alphonse Laurent(1813—1854)，单独工作并发表了在 1843 年得到的一个较重要的结果①. 他证明，当一个函数在一孤立点上不连续时，就必须用变数的升幂及降幂展开式来代替 Taylor 展开式. 如果函数和它的导数在一个圆环内单值并连续，这个圆环的中心是孤立点 a，则函数以相反方向沿着圆环的两个边界圆所取的积分适当展开后就给出 z 的升幂及降幂的一个展开式，它在圆环内收敛. 这个 Laurent 展开式是

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n, \tag{24}$$

它是 Taylor 展开式的一个推广. 这个结果 Weierstrass 在 1841 年就已知道，但未发表②.

Victor-Alexandre Puiseux 研究了多值函数的问题. 1850 年 Puiseux 发表了一篇著名的论文③，论 $f(u, z) = 0$ 给出的复代数函数，其中 f 是 u 和 z 的多项式. 他第一次搞清了极点与支点的区别(Cauchy 几乎没有觉察到这一点)，并且引进了本性奇点(一个无穷阶的极点)的概念，对这个概念 Weierstrass 曾独立地促使人们注意. 这样的点可以用 $e^{1/z}$ 在 $z = 0$ 作为例子. 虽然 Cauchy 在 1846 年的论文中确实考虑了简单多值函数沿着包围支点的几条路径的变化，但是 Puiseux 也澄清了这个问题. 他证明了如果 u_1

---

① *Comp. Rend.*, 17, 1843, 348～349；文章全文发表在 *Jour. de l'Ecole Poly.*, 23, 1863, 75～204.

② *Werke*, 1, 51～66.

③ *Jour. de Math.*, 15, 1850, 365～480.

是 $f(u, z)=0$ 的一个解，而且 z 沿着某一条路径变化，则 u_1 的最后值并不依赖于路径，只要这个路径确实不包围使 u_1 为无穷的任何点，也不包围使 u_1 等于其他解的任何点(即一个支点).

Puiseux 还证明了，z 的函数在支点 $z=a$ 处附近的展开式必须含有 $z-a$ 的分数次幂. 于是他改进了 Cauchy 的把函数展为 Maclaurin 级数的定理. Puiseux 得到 $f(u, z)=0$ 的解 u 的一个展开式，它不是展成 z 的幂而是展成 $z-c$ 的幂，所以这个展开式在一个以 c 为中心，并且不含极点或支点的圆内是正确的. 然后 Puiseux 让 c 沿着一条路径变化，使那些收敛圆部分重叠，并使在一个圆内的展开式可以延伸到另一个圆. 这样，从 u 在一点的值开始，可以沿着任何一条路径了解它的变化.

通过他对于多值函数和它们在复平面上的支点的有意义的研究，并且通过他对于这种函数的积分的创始性工作，Puiseux 把 Cauchy 在函数论方面的先驱性工作推进到可以称为第一阶段的尽头. 多值函数和它们的积分的理论中的困难尚待克服. Cauchy 的确写了关于多值函数的积分的其他论文①，在其中他企图跟上 Puiseux 的工作；虽然他引进了分支切割的概念，但他对极点和支点的区别仍然混淆不清. 代数函数及其积分的这个课题要由 Riemann 来继续进行(第 8 节).

在 1851 年《报告》(*Comptes Rendus*)的另外几篇论文中②，Cauchy 给出了关于复函数性质的一些更谨慎的叙述. 特别地，Cauchy 肯定了复函数本身及其导数的连续性对于幂级数展开式是必需的. 他还指出作为 z 的函数的 u 在 $z=a$ 处的导数与 $x+\mathrm{i}y$ 平面上 z 趋于 a 的方向无关，且 u 满足 $\partial^2 u/\partial x^2+\partial^2 u/\partial y^2=0$.

Cauchy 在 1851 年的这些论文中引进了新的术语. 对于某一

---

① *Comp. Rend.*, 32, 1851, 68～75 与 162～164 = *Œuvres*, (1), 11, 292～300 与 304～305.

② *Œuvres*, (1), 11.

区域中 z 的每一个值,当函数是单值的时候,他用了 monotypique 或 monodrome. 一个函数是 monogen,如果对于每一个 z,它恰有一个导数(即,导数与路径无关). 他称一个永不为无穷的、恰有一个导数的、单值函数为 synectique. 后来 Charles A. A. Briot (1817—1882)和 Jean-Claude Bouquet(1819—1885)引进了"holomorphic"(全纯)代替 synectique,并用"meromorphic"(亚纯)称在区域中只有极点的函数.

5. Weierstrass 探讨函数论的途径

正当 Cauchy 在由解析式表示的函数的导数和积分的基础上建立函数论的时候,Karl Weierstrass 开辟了一条新的探讨途径. 他于 1815 年出生在威斯特伐利亚(Westphalia),在波恩大学学习法律. 学了四年以后,他在 1838 年转向数学的学习,但未完成博士工作,而是得到许可,当一个高中(gymnasium)教员,从 1841 年到 1854 年他教年轻人的写作课及体育课. 这些年间他与数学界没有接触,但他刻苦地进行数学研究. 在这段时间内他发表的少数几个结果使他在 1856 年获得在柏林的工学院讲授技术课程的位置. 同一年他成为柏林大学的讲师,随后在 1864 年成为教授,一直担任这一职位到 1897 年去世.

他是一个有条理而又苦干的人. 不像 Abel, Jacobi, Riemann 那样,他没有直觉的闪光. 事实上他不信任直觉,而是致力于使数学推理建立在一个牢固的基础上. 有鉴于 Cauchy 的理论建立在几何的基础上, Weierstrass 转而构造实数理论;这个工作约在 1841 年完成之后(第 41 章第 3 节),他在幂级数的基础上建立起解析函数的理论,并建立起解析开拓的方法,幂级数的技巧是他从他的老师 Christof Gudermann(1798—1852)那里学来的. 这个工作是在 19 世纪 40 年代完成的,虽然当时他并没有发表. 他在函数

论的许多其他方面作出了贡献,并研究了天文学中的 n 体问题和光的理论.

很难确定 Weierstrass 的创作的日期,因为当他第一次得到这些创造时发表的并不多.通过他在柏林大学的讲演,他的许多工作才被数学界知道.当他在 19 世纪 90 年代出版他的《著作集》(*Werke*)时,他并不担心优先权,因为他的很多结果在当时已被其他人发表,他更关心的是阐明他发展函数论的方法.

用幂级数表示已用解析形式给出的复函数,自然是众所周知的.但是,从已知的一个在限定区域内定义一个函数的幂级数出发,根据幂级数的有关定理,推导出在其他区域中定义同一函数的另一些幂级数,这个问题是 Weierstrass 解决的.一个在以 a 为圆心以 r 为半径的圆 C 内收敛的 $z-a$ 的幂级数,代表一个函数,它在圆 C 内的每一个 z 值上解析.在圆内选择一点 b 并利用原始级数所给出的函数及其各阶导数的值,可以得到 $z-b$ 的一个新的幂级数,它的收敛圆 C' 与第一个圆交叠.在两个圆的公共点上,这两个级数给出函数的同一个值.但是,对于 C' 的处在 C 外部的点,第二个级数的值是第一个级数定义的函数的一个解析开拓.尽可能地继续下去,从 C' 接连地开拓到其他的圆,就得到 $f(z)$ 的全部解析开拓,完全的 $f(z)$ 便是在所有的圆中、在所有点上的值的集合.每一个级数称为函数的一个元素.

在增加越来越多的收敛圆以拓广函数的定义域的过程中,一个新圆也许可能覆盖链中不直接在它前面的一个圆的一部分,并且在这个新圆和前面一个圆的公共部分中函数的值可能不一致,这时函数便是多值的.

在这个过程中可能出现的奇点(极点或支点),必定位于幂级数的收敛圆的边界上,如果一个奇点的阶是有穷的,那么它是由 Weierstrass 包含在函数之中的,因为在这样一个点上 $(z-z_0)^{1/n}$ 的幂级数展开式只可能有有穷个负指数的项.为了得到在 $z=\infty$

附近的展开式,Weierstrass 使用 $1/z$ 的级数. 如果函数元素在全平面收敛,Weierstrass 就称它为一个整函数. 如果它不是一个有理整函数,即不是一个多项式,那么它在∞处便有一个本性奇点(例如 $\sin z$).

Weierstrass 还给出幂级数的第一个例子,它的收敛圆是它的自然边界,即圆是奇点曲线,并且给出了一个解析表达式的一个例子,它在平面的不同部分可以代表不同的解析函数.

6. 椭 圆 函 数

在这个世纪前半叶,可与复函数论基本定理的发展相提并论的,有椭圆函数及以后的 Abel 函数的特殊发展. 毫无疑问,Gauss 得到了椭圆函数论中的许多关键性的结果,因为其中许多是在他死以后,在一些他从未发表过的论文中找到的. 不过,公认的椭圆函数论的创始人是 Abel 和 Jacobi.

Niels Henrik Abel(1802—1829)是一个穷牧师的儿子. 作为在挪威奥斯陆学习的一个学生,他有幸以 Berndt Michael Holmböe(1795—1850)作为老师. 后者看出 Abel 的天才,并预言 Abel 17 岁时将成为世界上最大的数学家. 在奥斯陆和哥本哈根学习完以后,Abel 得到了一笔奖学金,使他能够出外旅行. 在巴黎他被介绍给 Legendre, Laplace, Cauchy 及 Lacroix,但他们无视他,用完了钱以后,他到柏林去和 Crelle 一起度过了 1825—1827 年. 他自己写道,当他回到奥斯陆时极度疲竭,以至他需依靠在一所教堂的门上. 为了钱,他给年轻学生教课. 通过他发表的工作,他开始引起人们的注意,Crelle 曾想,他也许可以为 Abel 在柏林大学谋一个教授的位置. 但 Abel 生了肺病,并于 1829 年去世.

Abel 知道 Euler, Lagrange, Legendre 在椭圆积分方面的工作,他从事于这一工作也许是从 Gauss 所作的评论,特别是他的

《算术研究》(*Disquisitiones Arithmeticae*)中的陈述得到启发的.他自己从1825年起开始写论文,他把他关于积分的重要论文于1826年10月30日送到巴黎科学院,以便能在它的杂志上发表.这篇论文是《关于很广一类超越函数的一个一般性质》,包含了Abel大定理(第7节).当时科学院的秘书Fourier读了论文的引言,然后委托Legendre和Cauchy对论文作出评价,后者是主要负责人.这篇论文很长并且很难,这只是因为它包含了许多新的概念.Cauchy把它放在一旁,醉心于自己的工作.Legendre把它忘了.Abel去世以后,当他已经有了名望时,科学院寻找这篇论文,找到之后于1841年发表①.Abel在《Crelle杂志》和Gergonne的《年报》上发表了其他关于方程论和椭圆函数的论文.这些论文从1827年起开始刊出.因为Abel 1826年的主要论文到1841年才发表,所以其他的一些作者,读了这段时期内发表的限制较多的定理,独立地得到了许多Abel 1826年的结果.

另一个椭圆函数的发现者是Carl Gustav Jacob Jacobi(1804—1851).和Abel不一样,他过着安静的生活.他出生于波茨坦(Potsdam)的一个犹太人家庭,在柏林大学学习,到1827年成为哥尼斯堡(Königsberg)的一个教授.1842年,由于健康不良,他放弃了他的职位.普鲁士政府给了他退休金,退隐到柏林,于1851年去世.他在世的时候声誉就很高,他的学生把他的思想散播到各个地方.

Jacobi讲授椭圆函数多年.他对这一课题的探讨成为函数论本身发展所遵循的模式.他还研究了函数行列式(Jacobi行列式)、常微分方程和偏微分方程、动力学、天体力学、流体动力学、超椭圆积分和超椭圆函数.Jacobi常被认为是一个纯粹数学家,但是,像他那个世纪和前一些世纪中的几乎所有的数学家一样,他最认真地研究自然界.

---

① *Mém. des. sav. étrangers*, 7, 1841, 176～264 = *Œuvres*, 145～211.

当 Abel 研究椭圆函数的时候，Jacobi(他也已经读过Legendre关于椭圆积分的工作)在 1827 年开始研究椭圆函数. 他送了一篇没有证明的论文给《天文报告》(*Astronomische Nachrichten*)①. 差不多在同一时间，Abel 独立地发表了他的《关于椭圆函数的研究》②. 两个人都达到了从椭圆积分的反函数着手研究这一关键性想法，这个想法 Abel 从 1823 年就已经有了. Jacobi 后来给出了他在 1827 年发表的结果的证明，发表在 1828—1830 年的《Crelle 杂志》的几篇文章中. 此后两个人都发表了关于椭圆函数的论文；不过 Abel 在 1829 年就去世，而 Jacobi 活到 1851 年，因而能够发表多得多的东西. 特别地，Jacobi 1829 年的《椭圆函数基本新理论》(*Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum*)③成了椭圆函数的一本关键性的著作.

通过 Jacobi 的来信，Legendre 熟悉了 Jacobi 和 Abel 的工作. 1828 年 2 月 9 日他在给 Jacobi 的信中说："我很满意地看到两个年轻数学家如此成功地开辟了分析的一个分支，它很久以来是我喜爱的领域，但在我自己的国家中它却没有受到应有的重视."后来 Legendre 发表了他的《椭圆函数专著》(*Traité des fonctions elliptiques*，二卷，1825—1826)的三个补篇，其中他叙述了 Jacobi 和Abel的工作.

一般椭圆积分牵涉到

$$u=\int R(x,\ \sqrt{P(x)})\,\mathrm{d}x, \tag{25}$$

其中 $P(x)$是一个具有不同根的三次或四次多项式，$R(x,\ y)$是 x 和 y 的一个有理函数. 企图推断 x 的函数 u 的一般性质的努力失败了，这是因为对于 Euler 和 Legendre 来说，积分的意义本身是

---

① *Astron. Nach.*, 6, 1827, 33～38 = *Werke*, 1, 31～36.

② *Jour. für Math.*, 2, 1827, 101～181 与 3, 1828, 160～190 = *Œuvres*, 263～388.

③ *Werke*, 1, 49～239.

受到限制的. $P(x)$的系数是实的,x 的取值范围是实的,并且不包含 $P(x)=0$ 的根. 有了复函数理论的更多知识,研究 x 的函数 u 就有可能前进一步,但这个见解没有获得效果. 结果证明,Abel 和 Jacobi 的想法较好.

具体地说, Legendre 引进了(第 19 章第 4 节)椭圆积分 $F(k, \phi)$, $E(k, \phi)$及 $\pi(n, k, \phi)$. 1826 年左右,Abel 注意到,如果(例如考虑 $F(k, \phi)$)研究

$$(26)\qquad u=\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\int_0^\phi \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}},$$

其中 $x=\sin\phi$, 那么会遇到像研究

$$u=\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x$$

时出现的同样的困难. 较好的关系来自把 x 作为 u 的函数来研究. 因此 Abel 建议在椭圆积分情形中,把 x 作为 u 的函数来研究. 由于 $x=\sin\phi$, 所以 ϕ 也可作为 u 的函数.

Jacobi 引进了①记号

$$\phi=\mathrm{am}\,u.$$

表示(26)定义的 u 的函数 ϕ. 他还引进了

$$\cos\phi=\cos\mathrm{am}\,u \text{ 和 } \Delta\phi=\Delta\mathrm{am}\,u=\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}.$$

这个记号被 Gudermann 简化为

$$x=\sin\phi=\sin\mathrm{am}\,u=\mathrm{sn}\,u,\ \cos\phi=\cos\mathrm{am}\,u=\mathrm{cn}\,u,$$
$$\Delta\phi=\Delta\mathrm{am}\,u=\mathrm{dn}\,u.$$

我们立刻有

$$\mathrm{sn}^2u+\mathrm{cn}^2u=1,\ \mathrm{dn}^2u+k^2\mathrm{sn}^2u=1.$$

如果 ϕ 换为$-\phi$,则 u 变号. 故有

$$\mathrm{am}(-u)=-\mathrm{am}\,u,\ \mathrm{sn}(-u)=-\mathrm{sn}\,u,$$
$$\mathrm{cn}(-u)=\mathrm{cn}\,u,\ \mathrm{dn}(-u)=\mathrm{dn}\,u.$$

---

① *Fundamenta Nova*, 1829.

由下式定义的量 K 起着三角函数中 π 的作用,

$$K=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}=F\left(k,\ \frac{\pi}{2}\right).$$

与 K 联系着的是超越量 K',它作为 k'的函数相同于 K 作为 k 的函数,其中 k'由 $k^2+k'^2=1$ 定义, $0<k<1$.

关于 K 及 K',重要的是(在这里不证明)

$\mathrm{sn}(u+4K)=\mathrm{sn}\,u,\ \mathrm{cn}(u+4K)=\mathrm{cn}\,u,\ \mathrm{dn}(u\pm 2K)=\mathrm{dn}\,u.$

所以 $4K$ 是椭圆函数 $\mathrm{sn}\,u$ 和 $\mathrm{cn}\,u$ 的周期,而 $2K$ 是 $\mathrm{dn}\,u$ 的周期.

到此为止,函数 $\mathrm{sn}\,u$, $\mathrm{cn}\,u$ 和 $\mathrm{dn}\,u$ 都只对实的 x 和 u 定义. Abel已有了把每一个函数看作是一个元素的想法,因为每一个函数只是对实值有定义. 他的下一个想法便是引进 u 的复值,在总体上来定义椭圆函数. 关于复函数的知识,Abel 在他访问巴黎时就熟悉了 Cauchy 的工作. 事实上,他曾研究了变数和指数都取复值的二项式定理. 首先推广到纯虚值是利用所谓 Jacobi 的虚变换来完成的. Abel 引进了

$$\sin\theta=\mathrm{i}\,\mathrm{tg}\,\phi,\ \cos\theta=\frac{1}{\cos\phi},\ \Delta(\theta,\ k)=\frac{\Delta(\phi,\ k')}{\cos\phi},$$

其中 $\theta=\mathrm{am}\,\mathrm{i}u$, 从而有

$$\mathrm{sn}(\mathrm{i}u,\ k)=\mathrm{i}\frac{\mathrm{sn}(u,\ k')}{\mathrm{cn}(u,\ k')},\ \mathrm{cn}(\mathrm{i}u,\ k)=\frac{1}{\mathrm{cn}(u,\ k')},$$

$$\mathrm{dn}(\mathrm{i}u,\ k)=\frac{\mathrm{dn}(u,\ k')}{\mathrm{cn}(u,\ k')}.$$

Abel 除了允许他的变量取纯虚值以外,还建立了椭圆函数的加法定理. 在

$$u=A(x)=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

的情形,我们知道这个积分是多值函数 $A(x)=\arcsin x$, 并且有

$$A(x_1)+A(x_2)=A(x_1y_2+x_2y_1),\tag{27}$$

其中 y_1 和 y_2 是相应的余弦值;即 $y_1=\sqrt{1-x_1^2}$. 但在这种情形下

引进单值的反函数 $x=\sin u$ 就可以得到很大的简化,替代(27),我们有熟知的正弦函数加法定理. 现在在

$$u=E(x)=\int_0^x\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{R(x)}}$$

的情形(其中 $y^2=R(x)$ 是一个四次多项式),Euler 曾经得到加法定理(第 19 章第 4 节)

$$E(x_1)+E(x_2)=E(x_3),$$

其中 x_3 是 x_1, x_2, y_1, y_2 的一个已知的有理函数,并且 $y=\sqrt{R(x)}$. Abel 认为对反函数 $x=\phi(u)$, 也许有一个简单的加法定理,而这一点被证明是对的. 这个结果也出现在他的 1827 年的论文中. 于是对于实的 u 及 v 有

$$\text{(28)}\qquad \operatorname{sn}(u+v)=\frac{\operatorname{sn}u\operatorname{cn}v\operatorname{dn}v+\operatorname{sn}v\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u}{1-k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{sn}^2v},$$

对于 $\operatorname{cn}(u+v)$ 及 $\operatorname{dn}(u+v)$ 亦有类似的公式. 这些就是椭圆函数的加法定理,是椭圆积分加法定理的类似物.

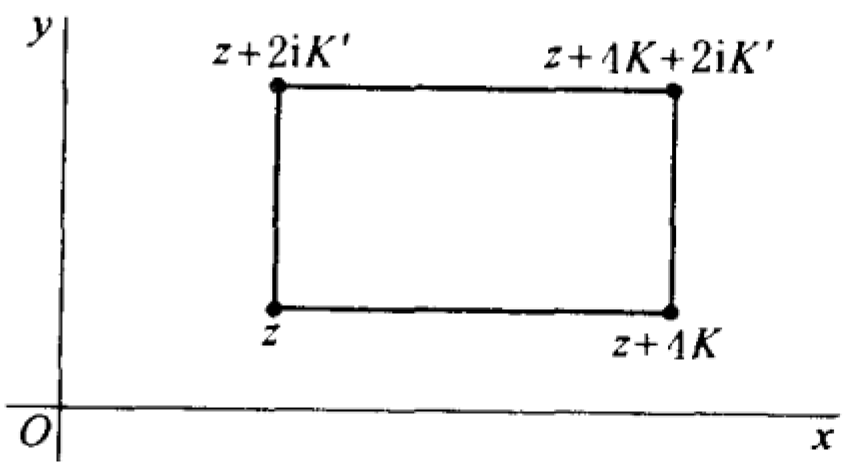


图 27.5

对于自变量的实值和虚值定义了椭圆函数以后,Abel借助于加法定理,便将定义推广到复值. 因为,若 $z=u+\mathrm{i}v$, 则由加法定理, $\operatorname{sn}z=\operatorname{sn}(u+\mathrm{i}v)$ 就有了意义,分别用 u 和 $\mathrm{i}v$ 的 sn, cn 和 dn 表出.

随之还有

$$\text{(29)}\qquad \begin{aligned}\operatorname{sn}(\mathrm{i}u+2\mathrm{i}K',k)&=\operatorname{sn}(\mathrm{i}u,k),\\ \operatorname{cn}(\mathrm{i}u+4\mathrm{i}K',k)&=\operatorname{cn}(\mathrm{i}u,k),\\ \operatorname{dn}(\mathrm{i}u+4\mathrm{i}K',k)&=\operatorname{dn}(\mathrm{i}u,k).\end{aligned}$$

所以, $\operatorname{sn}z$ 的周期(不是唯一的)是 $4K$ 及 $2\mathrm{i}K'$; $\operatorname{cn}z$ 的周期是 $4K$ 及 $2K+2\mathrm{i}K'$; $\operatorname{dn}z$ 的周期是 $2K$ 及 $4\mathrm{i}K'$. 关于周期,重要的一点

是存在两个周期(它们的比不是实数),因而这些椭圆函数是双周期的.这是 Abel 的伟大发现之一.这些函数是单值的,所以只须在复平面的一个平行四边形中(图 27.5)研究它们,因为它们在每一个全等的平行四边形中重复它们的性质.椭圆函数除去是单值的双周期的以外,只有一个本性奇点,在∞处.事实上可以用这些性质定义椭圆函数.在每一个周期平行四边形中,它们的确有极点.

Abel 引进了椭圆积分的反演(Legendre 忽略了这一点,而这被证明是探索椭圆积分的关键),尽管他是从 Legendre 那里取得可能是他一生工作的精华的,但 Legendre 称赞 Abel 说:"这个年轻的挪威人的智力是多高啊."Charles Hermite 说 Abel 留下了一些思想,可供数学家们工作 150 年.

Abel 所得到的结果中,有许多被 Jacobi 独立地得到了,前面已指出过,他在这方面的第一篇论文,出现在 1827 年.Jacobi 知道他在《新基本》(*Fundamenta Nova*)中所用的基本方法是不令人满意的,并且部分地在这本书中的某些地方和他在以后的演讲中,采用了不同的起点.他的演讲从未全部发表,但通过他的学生们的信件和笔记,这些演讲的实质内容相当全面地被知晓了.在他的新的探讨中,他把他的椭圆函数理论建立在被称为 θ 函数这一辅助函数的基础上,它是用

$$\theta(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-n^2t+2niz} \tag{30}$$

为例来说明的,其中 z 及 t 是复数,且 $\operatorname{Re}(t)>0$.这个级数在 z 平面的任何有界区域内都绝对一致收敛.Jacobi 引进了四个 θ 函数,然后利用这些函数来表示出 $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ 和 $\operatorname{dn} u$. θ 函数是可以构造出椭圆函数的最简单的元素.他还得到 θ 函数的各种无穷级数和无穷乘积的表示式.对于 Abel 工作中想法的进一步研究将 Jacobi 引导到研究 θ 函数与数论之间的关系.这个联系随后由 Hermite,

Kronecker以及其他人继续进行. θ函数的多种不同形式之间的关系的研究是19世纪数学家的一个较重要的活动. 它是常见的贯穿在数学中的许多流行一时的风尚之一.

在1835年的一篇重要论文①中,Jacobi证明了单变量的一个单值函数,如果对于自变量的每一个有穷值具有有理函数的特性(即为一亚纯函数),它就不可能有多于两个的周期,而周期的比必须是一个非实数. 这个发现开辟了一个新的研究方向,即,找出所有的双周期函数的问题. 就在1844年②,Liouville在给法国科学院的一封信中,说明如何从Jacobi的定理出发建立双周期椭圆函数的一个完整的理论. 这个理论是椭圆函数方面的一个较重要的贡献. 在双周期性中Liouville发现了椭圆函数的一个实质性质及其理论的一个统一观点,虽然双周期函数是比Jacobi称之为椭圆函数的更广的一类函数,但双周期函数的确具有椭圆函数的所有的基本性质.

Weierstrass于1860年左右开始研究椭圆函数,他从Gudermann那里学习了Jacobi的工作,并从Abel的论文里学习了Abel的工作. 这些论文给他的印象如此之深,以至于后来经常督促他的学生们读Abel的著作. 这时,为了他的教员证明书,他研究了Gudermann给他指定的一个问题,即把椭圆函数表示成为幂级数的商. 他做到了这一点. 作为一个教授,在他的讲演中他经常重新作出他的椭圆函数理论.

Legendre曾将椭圆积分简化成含有一个四次多项式的平方根的三个标准形式. Weierstrass得到含有一个三次多项式的平方根的三个不同形式③,即

---

① *Jour. für Math.*, 13,1835,55～78 = *Werke*, 2,23～50.

② *Comp. Rend.*, 19,1844,1261～1263与32,1851,450～452.

③ *Sitzungsber. Akad. Wiss. zu Berlin*, 1882, 443～451 = *Werke*, 2,245～255;亦见*Werke*, 5.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}, \int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}},$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}},$$

他把"反演"第一个积分所得的椭圆函数作为基本的椭圆函数.就是,如果

$$u = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}},$$

那么 u 的椭圆函数 x 就是 Weierstrass 的

$$x = \wp(u) = \wp(u \mid g_2, g_3).$$

为了使 $\wp(u)$不退化为一个指数函数或三角函数,必须有判别式 $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$,换句话说,x 的三次多项式的三个根应该是不相等的. Weierstrass 的双周期 $\wp(u)$起着 Jacobi 理论中 sn u 的作用并且提供了最简单的双周期函数.他证明了每一个椭圆函数可以借助于 $\wp(u)$和他的导数很简单地表示出来.在 Weierstrass 的探讨中,椭圆函数的"三角学"比较简单,但 Jacobi 的函数和 Legendre 的椭圆积分对于数值计算比较好.

Weierstrass 实际上是从他的 $\wp(u)$的一个元素出发,即

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{4\cdot 5}u^2 + \frac{g_3}{4\cdot 7}u^4 + \cdots \quad (g_2, g_3 \text{ 是复的}),$$

这个元素是他利用解以上积分给出的关于 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}u$ 的微分方程得到的.然后,类似于 Abel 的方式,利用关于 $\wp(u)$的加法定理得出整个函数. Weierstrass 的工作完备了、改写了并且美化了椭圆函数的理论.

虽然我们将不进入特殊细节的讨论,但在我们离开椭圆函数这个课题以前,不能不提一下 Charles Hermite(1822—1901)的工作,他是巴黎大学理学院(Sorbonne)和多科工艺学校的教授.他从学生时代起就经常研究椭圆函数.他在 1892 年写道:"我不能离开椭圆领域.山羊被系在那里,就必须在那里吃青草."他创作

了理论本身中的基本结果,并研究了与数论的联系.他应用了椭圆函数解五次多项式方程,并处理了包含这种函数的力学问题.他也由于对 e 的超越性的证明和他引进的 Hermite 多项式而闻名于世.

7. 超椭圆积分与 Abel 定理

在椭圆积分(25)和相应函数的研究中所取得的成功鼓励着数学家们去处理一种更难类型的积分——超椭圆积分.

超椭圆积分具有形式

$$\int R(x,\ y)\mathrm{d}x, \tag{31}$$

其中 $R(x,\ y)$是 x 和 y 的一个有理函数,$y^2=P(x)$,并且 $P(x)$ 的次数最少是五.当 $P(x)$是五次或六次时,这种积分在 19 世纪中期,被称为超椭圆积分.为了强调复值,通常把它写成

$$\int R(u,\ z)\mathrm{d}z, \tag{32}$$

而 $P(z)$通常被写成

$$u^2\equiv P(z)=A(z-e_1)\cdots(z-e_n). \tag{33}$$

当然 u 是 z 的一个多值函数.

在形如(32)的积分中,有一些是处处有穷的.这些基本的积分是

$$u_1=\int\frac{\mathrm{d}z}{u},\ u_2=\int\frac{z\mathrm{d}z}{u},\ \cdots\ ,\ u_p=\int\frac{z^{p-1}\mathrm{d}z}{u}, \tag{34}$$

其中 u 由(33)给出,而 $p=(n-2)/2$ 或 $(n-1)/2$,依 n 是偶或奇而定.对于 $n=6$ (因而 $p=2$),有两个这样的积分.一般积分(32)最多有极点和对数奇点,即像 $\log z$ 在 $z=0$ 处那样的奇点.那些第一类的积分,即那些处处有穷因而没有奇点的积分,总是可以借助于线性无关的 p 个积分(34)表示出来.

对于 $n=6$（因而 $p=2$）的情形，第二类积分的范例是

$$\int \frac{z^2\,dz}{\sqrt{P(z)}},\ \int \frac{z^3\,dz}{\sqrt{P(z)}}, \tag{35}$$

其中 $P(z)$ 是一个六次多项式. 对于 $n=6$，第一类和第二类积分每个都有四个周期.

超椭圆积分是上限 z 的函数，如果下限固定的话. 假定我们用 w 表示这样一个函数. 那么，像椭圆积分的情形一样，可以提出什么是 w 的反函数 z 的问题. Abel 处理了这个问题，但他没有解决；后来 Jacobi 着手处理了这问题①. 我们按照 Jacobi 那样来考虑特殊的超椭圆积分

$$w=\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{P(z)}},\ w=\int_0^z \frac{z\,dz}{\sqrt{P(z)}}, \tag{36}$$

其中 $P(z)$ 是一个五次或六次多项式. 在这里，要将 z 确定为 w 的单值函数，经验证明是没有希望的. 事实上，Jacobi 证明，对于五次的 $P(z)$，这种积分的单纯反演并不引到一个单演函数. 对 Jacobi 说来，反函数是不合理的，因为在每一种情形下 z 作为 w 的函数是无穷多值的；而在当时这种函数并不能被很好地理解.

Jacobi 决定考虑这种积分的组合. 在 Abel 定理（看下面）的指引下（这个定理的叙述他至少是知道的，因为大部分内容已经发表），Jacobi 的做法如下：考虑方程

$$\int_0^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{P(z)}}+\int_0^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{P(z)}}=w_1, \tag{37}$$

$$\int_0^{z_1} \frac{z\,dz}{\sqrt{P(z)}}+\int_0^{z_2} \frac{z\,dz}{\sqrt{P(z)}}=w_2. \tag{38}$$

Jacobi 成功地证明了，对称函数 z_1+z_2 和 z_1z_2 都是 w_1 和 w_2 的单值函数，具有四个周期的一个系统. 于是就得到两个变数 w_1 和 w_2 的函数 z_1 和 z_2，他还给出了这些函数的一个加法定理. Jacobi 遗

① *Jour. für Math.*, 9, 1832, 394 ~ 403 = *Werke*, 2, 7 ~ 16, 与 *Jour. für Math.*, 13, 1835, 55 ~ 78 = *Werke*, 2, 25~50 与 516~521.

留下许多不完全之处，他说："对于 Gauss 的那种严密性，我们没有时间."

推广椭圆与超椭圆积分的研究是由 Galois 开始的，不过较重要的开创性步骤是 Abel 在 1826 年的论文中作出的. 他考虑(32)，即

$$\int R(u,\ z)\mathrm{d}z, \tag{39}$$

但原来(33)那里的 u 和 z 只是由一个多项式如 $u^2 = P(z)$ 联系着，因而代替(33)，Abel 考虑一个一般的含 z 和 u 的代数方程

$$f(u,\ z) = 0. \tag{40}$$

方程(39)和(40)定义一个 Abel **积分**，它包含椭圆与超椭圆积分作为特殊情形.

虽然 Abel 没有将 Abel 积分的研究推进很远，但他证明了这方面的一个关键性定理. Abel 的基本定理是椭圆积分加法定理(第 19 章第 4 节)的一个很宽的推广. 这个定理和证明是在他 1826 年的巴黎论文中，定理的叙述刊在 1829 年的《Crelle 杂志》① 上. 考虑积分

$$\int R(x,\ y)\mathrm{d}x, \tag{41}$$

其中 x 与 y 由方程 $f(x,\ y) = 0$ 联系，f 为 x 和 y 的一个多项式. 在 Abel 写的文章中，x 和 y 作为实变数，虽然偶尔也以复数出现. 非严谨地叙述起来，Abel 定理是这样的："几个具有形式(41)的积分之和可以用 p 个这样的积分加上一些代数的与对数的项表示出来. 另外，这个数 p 只依赖于方程 $f(x,\ y) = 0$，而事实上，它就是这个方程的亏格(genus).

为了得到一个更精确的叙述，设 y 是 x 的代数函数，由下式定义：

---

① *Jour. für Math.*, 4, 212 ～ 215 = *Œuvres*, 515～517.

$$f(x, y) = y^n + A_1 y^{n-1} + \cdots + A_n = 0, \tag{42}$$

其中 A_i 是 x 的多项式，而多项式(42)不可能分解成同样形式的因式. 设 $R(x, y)$是 x 和 y 的任一有理函数. 则任何 m 个相似积分之和

$$\int^{(x_1, y_1)} R(x, y)\mathrm{d}x + \cdots + \int^{(x_m, y_m)} R(x, y)\mathrm{d}x \tag{43}$$

(其下限固定，但是任意)，可以用 $x_1, y_1, \cdots, x_m, y_m$ 的有理函数与这种有理函数的对数加上 p 个积分

$$\int^{(z_1, s_1)} R(x, y)\mathrm{d}x, \cdots, \int^{(z_p, s_p)} R(x, y)\mathrm{d}x \tag{44}$$

之和来表示，其中 $z_1, \cdots, z_p$ 是 x 的值，可从 $x_1, y_1, \cdots, x_m, y_m$ 作为一个代数方程的根确定出来，这个方程的系数是 $x_1, y_1, \cdots, x_m, y_m$ 的有理函数，而 $s_1, \cdots, s_p$ 是由(42)确定的相应的 y 值，而任一 s_i 可以确定为 z_i 及 $x_1, y_1, \cdots, x_m, y_m$ 的一个有理函数. 这样用$(x_1, y_1), \cdots, (x_m, y_m)$来确定$(z_1, s_1), \cdots, (z_p, s_p)$的关系必须假定在积分的各阶段中都成立；特别是这些关系确定出后面 p 个积分的下限，用开始的 m 个积分的下限表示. 数 p 不依赖于 m，不依赖于有理函数 $R(x, y)$的形式，也不依赖于 $x_1, y_1, \cdots, x_m, y_m$ 的值，但它确实依赖于联系 y 与 x 的基本方程(42).

在 $f = y^2 - P(x)$，$P(x)$是一个六次多项式而 $p = (n-2)/2 = 2$ 的超椭圆积分的情况下，Abel 定理的主要部分是说

$$\begin{aligned}\int_0^{x_1} R(x, y)\mathrm{d}x + \cdots + \int_0^{x_m} R(x, y)\mathrm{d}x &= \int_0^{A} R(x, y)\mathrm{d}x + \int_0^{B} R(x, y)\mathrm{d}x \\ &\quad + R_1(x_1, y_1, \cdots, x_m, y_m, A, y(A), B, y(B)) \\ &\quad + \sum \text{const.} \log R_2(x_1, y_1, \cdots, x_m, y_m, \\ &\qquad A, y(A), B, y(B)),\end{aligned} \tag{45}$$

其中 R_1 和 R_2 是它们的变数的有理函数.

Abel 对一般的 $f(x, y)=0$ 的少数几种情形,实际上计算了数 p. 虽然他没有看出他的结果的全部意义,但他肯定在 Riemann 以前就认识到了亏格的概念并且建立了 Abel 积分这个科目. 他的论文很难懂,部分地是因为他试图利用实际计算结果来证明我们今天称之为存在定理的东西. 后来的证明很大地简化了 Abel 的证明(也看第 39 章第 4 节). Abel 没有考虑反问题. 所有关于超椭圆积分和 Abel 积分的反演的工作,一直到 Riemann 出现,都受到处理多值函数有局限性的方法的妨碍.

8. Riemann 与多值函数

在 1850 年左右,在函数论方面取得成就的一段时期告终了. 严密的方法(像 Weierstrass 所提供的),结果的准确描写和无疑问的存在性证明,在任何一种数学训练中都标志着发展中的一个重要的但也是最后的阶段. 进一步的发展必须有一段先行时期,充满着自由的、繁多的、不连贯的、常常是偶然发现的、而且也许是无秩序的创造. Abel 定理就是这样的一步. 在代数函数、它们的积分和反函数的理论中,一个新的发明时期是属于 Riemann 的. 他实际上提供了一个宽广得多的理论,即多值函数的处理. 在这方面只有 Cauchy 与 Puiseux 曾作过研究,并且由此为几个不同的进展铺平了道路.

Georg Friedrich Bernhard Riemann(1826—1866)是 Gauss 和 Wilhelm Weber 的学生. 1846 年到格丁根学神学,但不久就转学数学. 他的 1851 年的博士论文是在 Gauss 指导下写的,题目是《单复变函数的一般理论的基础》①,是复函数论的一篇基本论文. 三年以后他成为格丁根的一个无薪大学教员(*Privatdozent*),即被允许作一些讲演并收学生的酬金. 为了获得无薪大学教员的资格,

① *Werke*, 3～43.

他写了大学讲师就职论文《关于利用三角级数表示一个函数的可能性》(*Habilitationsschrift*),并且作了一个大学讲师就职讲演《关于几何基础的假设》(*Habilitationsvortrag*). 在这以后又写了一批有名的论文. 1859 年 Riemann 接替 Dirichlet 作为格丁根的数学教授,他死于肺病.

Riemann 常被描述为一位纯粹数学家,但这远非正确. 虽然他对数学本身作了很多贡献,但他深深地关心于物理以及数学与物理世界的关系. 他写了关于热、光、气体理论、磁、流体力学以及声学方面的论文. 他企图将引力与光统一起来,并研究了人耳的结构. 他的关于几何基础的工作试图找出我们对于物理空间的知识哪一些是绝对可靠的(第 37 章). 他自己说,他的关于物理定律的工作是他的主要兴趣. 作为一个数学家,他自由地运用几何直观及物理论证. 基于 Felix Klein 给出的证据,Riemann 的复函数思想很可能是来自他研究平面电流的流动. 位势方程是那个科目的中心,而在 Riemann 对复函数的探讨中也是这样.

在 Riemann 对多值函数的探讨中,关键思想是 Riemann 面的概念. 函数 $w^2 = z$ 是多值的,事实上对于 z 的每一个值,有 w 的两个值. 为了研究这个函数并保持两个值集 $\sqrt{z}$ 和 $-\sqrt{z}$ 分开,即把分支分开来,Riemann 给每一分支引进一个 z 值平面. 他还附带地在每一平面上引进一个点对应于 $z = \infty$. 这两个平面被看作是一个位于另一个的上方,并且首先是在两个分支给出相同 w 值的那些 z 值上连接起来. 这样,$w^2 = z$ 的这两个平面(或称为叶)就在 $z = 0$ 和 $z = \infty$ 处连接起来了.

现在 $w = +\sqrt{z}$ 仅由上叶上的 z 值表示,$w = -\sqrt{z}$ 则由下叶的 z 值表示. 只考虑上叶的 z 值时,就理解为必须计算 $w_1 = +\sqrt{z}$. 可是,当 z 沿着该叶上围绕原点的圆变动(图 27.6),因而 $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ 中的 θ 由 0 变到 2π 时,$\sqrt{z}$ 只覆盖住映入 w 值的复平面上的一个半圆. 现在让 z 变动到第二叶,譬如说,让它穿过正 x 轴.

当 z 变动到这个第二叶时，我们取由 $w_2=-\sqrt{z}$ 给出的 w 值. 当 z 作出另一个绕原点的环路，因而在第二叶上 θ 由 2π 变到 4π 时，对这个路径，我们得到 $w_2=-\sqrt{z}$ 的取值范围，这些 w 值的极角由 π 变到 2π. 当 z 又一次穿过正 x 轴时，我们认为它是运行在第一叶上. 这样，经过 z 值绕原点的两个环行(在每一叶上各一次)，我们就得到函数 $w^2=z$ 的 w 值的全部范围. 另外，本质的一点是，如果 z 在 Riemann 面(它是两叶的集合)上变动，w 就变为 z 的一个单值函数.

为了把一叶上的路径区别于另一叶上的路径，我们同意在 $w^2=z$ 的情形下，把正 x 轴看作是一个分支切割. 它连接点 $z=0$ 和 $z=\infty$. 也就是说，当 z 穿过这个切割时，必须取属于 z 进入的那一叶的 w 的分支. 分支切割并不一定要是正 x 轴，但是，在现在的情形下，它必须连接 0 和∞. 点 0 和∞称为支点，因为当 z 绕着 0 和∞划出一个闭路径时，$w^2=z$ 的分支互相交换.

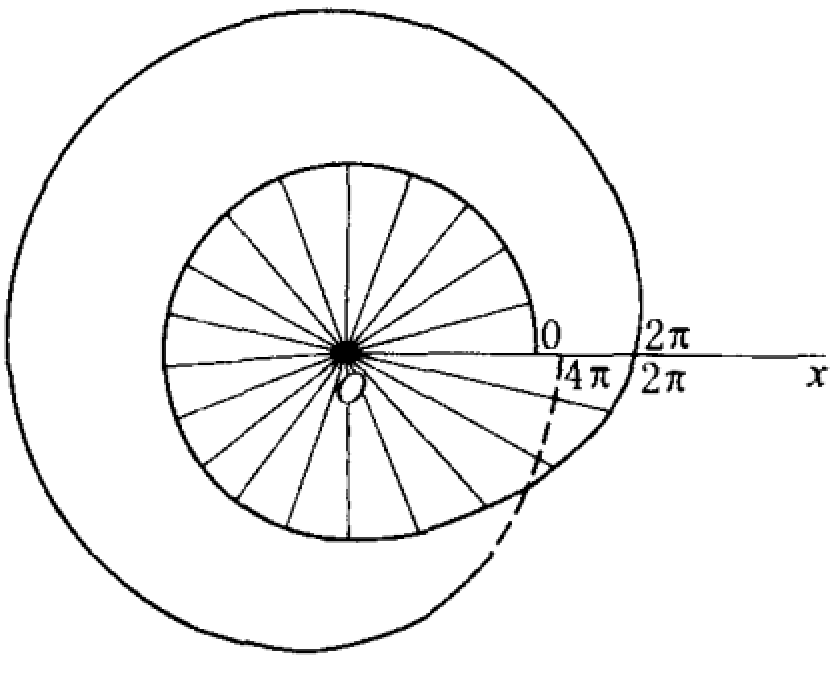


图 27.6

函数 $w^2=z$ 和与它相联系的 Riemann 面特别简单. 考虑函数 $w^2=z^3-z$. 这函数也有两个分支，它们在 $z=0$，$z=1$，$z=-1$ 和 $z=\infty$ 处变为相等. 而且(我们不给出全部论证)所有这四点都是支点，因为如果 z 绕着它们中的任一点作一环行时，w 的值就从一个分支变到另一个分支. 分支切割可以取为由 0 到 1，0 到 −1，1 到∞和 −1 到∞的线段. 当 z 穿过这些分支切割的任何一个时，w 的值从它在一个分支所取的值变到它在第二个分支所取的值.

对于更复杂的多值函数，Riemann 面更为复杂. 一个 n 值函数需要一个 n 叶 Riemann 面. 可能有很多支点，必须引进连接每两

个支点的分支切割. 另外,一个支点的各叶并不一定和另一支点的各叶相同. 如果 k 个叶重合于一个支点,就称这个支点是 $k-1$ 阶的. 然而一个 Riemann 面的两叶可以在一点接触,但是当 z 绕这一点走完一周时,函数的各分支可能不变. 这时,这个点就不是支点.

不可能在三维空间里准确地表示出 Riemann 面. 例如, $w^2 = z$ 的两叶,如果在三维空间里来表示,它们就必须沿正 x 轴相交. 因而一叶必须沿着正 x 轴被割开,但是另一方面数学要求从第一叶光滑地进入第二叶,然后,绕 $z=0$ 作一环行以后,又回到第一叶.

Riemann 面不仅是描绘多值函数的一个方法,而且有效地使这样的函数在曲面上单值,与 z 平面上的情形相对立. 这样,关于单值函数的定理可以推广到多值函数. 举例来说,单值函数沿着一个区域(在其中函数为解析)的边界曲线的积分为 0 的 Cauchy 定理,被 Riemann 推广到了多值函数. 解析区域在**曲面**上必须是单连通的(可以收缩到一点的).

Riemann 把它的曲面想象为平面的一个 n 叶复制品,每一个复制品被补充了一个无穷远点. 可是,把这样一个曲面设想为 n 个互相连结的平面,就难以理解所有的有关论证. 因此,从 Riemann 那个时候以来,数学家们曾经提出了一些较易想象的等价模型. 我们知道,利用球极平面射影可以将一个平面变换成一个球面(第 7 章第 5 节). 因此我们可以利用 n 个半径差不多相同的同心球面来构造 Riemann 面的一个模型. 球面序列是和平面序列相同的. 平面的支点与分支切割照样变换到球面上,因而这些球面沿着分支切割互相缠绕. 现在我们把这组球面想象为 z 的域,而 z 的多值函数 w 在这组球叶上是单值的.

直到现在,我们说明 Riemann 的思想时,都是从一个函数 $f(w, z)=0$ 出发(它是 w 和 z 的一个不可约多项式),指出什么

是它的 Riemann 面. 这并不是 Riemann 的途径. 他是从一个 Riemann 面出发的,并提议证明有一个属于它的方程 $f(w, z) = 0$,并进一步证明有其他单值及多值函数定义在这个 Riemann 面上.

单值解析函数 $f(z) = u + iv$ 的 Riemann 定义是:这个函数在一点及其邻域内解析,如果它连续可微并满足我们现在称之为 Cauchy-Riemann 方程的话:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{46}$$

我们知道这些方程曾出现在 d'Alembert, Euler 和 Cauchy 的著作中. 顺便说说, Riemann 是第一个要求导数 dw/dz 的存在性是指 $\Delta w/\Delta z$ 的极限必须对于 $z + \Delta z$ 趋近于 z 的每一途径都相同的人. (这个条件区分出了复函数,因为在实函数 $u(x, y)$ 的情形下, u 的一阶导数对于所有趋于某点 (x_0, y_0) 的方向都存在并不能保证解析.) 于是他寻求整个地决定 $x + iy$ 的一个函数的最少条件,而不管这个函数存在于哪一个区域. 从 Cauchy-Riemann 方程显然看出, u 和 v 要满足二维位势方程

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \tag{47}$$

Riemann 曾有过这样一个想法,认为利用 u 满足位势方程这个事实,这个复函数可以在它的存在区域中立刻整个地被确定.

Riemann 明确地假定, Riemann 面上的一个位置函数 w 将由实函数 $u(x, y)$ 确定(除一个附加的常数以外),如果 u 满足下列条件:

(1) 它在曲面上所有使导数不为无穷的点处满足位势方程.

(2) 如果 u 是多值的,那么它在曲面任一点上的值彼此相差一些实常数整数倍的线性组合(这些实常数是 w 的周期模的实部,我们将在以后讨论).

(3) u 可以在曲面的指定点上有给定形式的无穷(极点). 这

些无穷应属于使 w 为无穷的那些项的实部. 作为一个次要的条件,他的确进一步假定了沿着曲面一部分的边界闭曲线,u 可以有有穷值,或者说 u 和 v 的边界值可能存在一个关系. 至于这样一个关系的一般性的程度,Riemann 说得不明确.

这些条件应该确定 u. 一旦 u 被确定了,则由 Cauchy-Riemann 方程就有

$$v=\int\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y\right). \tag{48}$$

这样 v 因而 w 也被确定了. 重要的是,对于 Riemann 来说,u 的域是 Riemann 面的任何一个部分,包括可能是整个曲面. 在他的博士论文中,他考虑了有边界的曲面,只是在以后才用了闭曲面,即没有边界的曲面,例如环面.

为了决定 u,Riemann 的本质性工具是他称为的 Dirichlet 原理,因为这是他从 Dirichlet 那里学到的;不过他把它推广到 Riemann 面上的区域,并且在域中规定了 u 的奇异性和跳跃(以上条件 2 及 3). Dirichlet 原理说的是,最小化 Dirichlet 积分

$$\iint\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

的函数 u 满足位势方程. 事实上后者就是 Dirichlet 积分的第一变分为零的必要条件(也看第 28 章第 4 节). 因为在 Dirichlet 积分中,被积函数为正,故有一个大于或至少等于 0 的下界,Riemann 断定必有一函数 u 最小化积分并因而满足位势方程. 于是对 Riemann 来说,函数 u 的存在,因而由(48),函数 $f(z)$的存在(它属于 Riemann 面,甚至可以有规定的奇异性和复跳跃(周期性模)),可以保证.

以一个已给的 Riemann 面作为值域的函数的存在性一旦确立以后,就可以证明对于已给的曲面可以联系一个基本方程,即有一个 $f(w,z)=0$,它以已给的曲面为它的曲面. 至于这个曲面如

何相应于 w 与 z 之间的关系，Riemann 并没有叙述. 实际上，这个 $f(w, z)=0$ 不是唯一的. 事实上，从曲面上 w 与 z 的每一个有理函数 w_1，通过 $f(w, z)=0$ 可以得到另一个方程 $f_1(w_1, z)=0$，如果它是不可约的，那么就有同一个 Riemann 面. 这是 Riemann 方法的一个特点.

为了进一步研究能在一个 Riemann 面上存在的函数类，必须熟悉 Riemann 关于 Riemann 面的连通性的概念. 一个 Riemann 面可能有边界曲线，或可能像球或环面那样是闭的. 如果是一个代数函数的 Riemann 面，也就是说，如果 $f(w, z)=0$ 定义 w 为 z 的函数，而 f 是 w 和 z 的一个多项式，那么曲面就是闭的. 如果 f 是不可约的，即不能表示为这种多项式的乘积，那么曲面是由一片构成的，或者说是连通的.

一个平面或一个球面是这样一个曲面，任意一条闭曲线把它分成两部分，要连续地从一个部分中的一点通到另一部分中的一点，不可能不穿过这闭曲线. 这样的一个曲面称为**单连通的**. 可是，如果能够在一个曲面上画出一条闭曲线，它不使曲面分离，那么这个曲面就不是单连通的. 而如果能够在一个曲面上画出某种闭曲线而不至使这曲面不连通，这曲面就是多连通的. 举例来说，我们可以在环面上画两条不同的闭曲线（图 27.7），即便两者都出现，也不使这个曲面不连通.

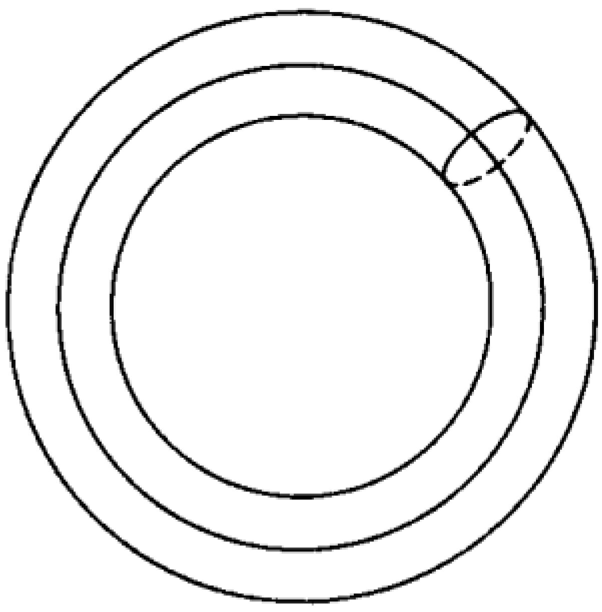


图 27.7

Riemann 想指定一个数来表示他的曲面的连通性. 他把极点与支点看作是曲面的部分，而且由于他心目中想的是代数函数，所以他的曲面是闭的. 去掉一叶的一小部分，这个曲面就有了一条边界曲线 C. 然后他把这个曲面想象为被一个不自交的曲线割开，这条曲线从边界 C 的一点跑到边界 C 的另

一点. 这样一条曲线称为横剖线(*Querschnitt*). 这条横剖线和 C 被看作是一个新的边界,并且可以引进从(新)边界的一点出发到另一点而不穿过(新)边界的第二条横剖线.

引进足够多的这样的横剖线,将一个可能是多连通的 Riemann 面剖为一个单连通曲面. 例如,如果一个曲面是单连通的,就不需要横剖线,并且这个曲面有连通数(Grundzahl)1. 一个曲面称为双连通的,如果用一条适当的横剖线就可以把它变成单一的单连通曲面. 这时,连通数是 2. 一个平面环和有两个洞的球面就是双连通的例子. 一个曲面称为三连通的,如果用两条适当的横剖线可以把它变成单一的单连通曲面. 这时连通数就是 3. 有一个洞的环面就是一个例子. 一般地说,一个曲面称为 N 连通的,或有连通数 N,如果用 $N-1$ 条适当的横剖线可以把它变成一个单连通曲面. 有 N 个洞的球面有连通数 N.

现在可以将一个 Riemann 面(有一个边界)的连通数和支点的个数联系起来了. 每一个支点 r_i 是按照在这一点互换的函数的分支个数来计算的. 如果这个数是 $w_i, i=1,2,\cdots,r$,那么 r_i 的重数就是 w_i-1. 假定曲面有 q 叶,则连通数 N 是

$$N=\sum_i w_i-2q+3.$$

可以证明,有单一边界的闭曲面的连通数 N 是 $2p+1$. 所以

$$2p=\sum w_i-2q+2.$$

整数 p 称为 Riemann 面和与之相联系的方程 $f(w,z)=0$ 的亏格,这个联系是 Riemann 建立的.

一个相当重要的特殊情形是

$$w^2=(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_n)$$

的曲面,它有一个两叶的 Riemann 面,有 n 个有穷支点,当 n 是奇数时,$z=\infty$ 是一个支点,于是 $\sum w_i=n$ 或 $n+1$, $2q=4$. 曲面的亏格 p 是

$$p = \begin{cases} \dfrac{n-2}{2}, \text{当 } n \text{ 为偶数时}, \\ \dfrac{n-1}{2}, \text{当 } n \text{ 为奇数时}. \end{cases}$$

给定了由 $f(w, z) = 0$ 确定的一个 Riemann 面，我们知道 w 是这个曲面上的点的一个单值函数. 于是 w 和 z 的每一个有理函数也是曲面上的位置的一个单值函数（因为在这个有理函数中可以将 w 换为它的用 z 表示的值）. 这个有理函数的支点，虽不是它的极点，但也和 f 的那些支点相同. 反过来，可以证明具有有穷阶极点的曲面上的位置的每一个单值函数，都是 w 和 z 的一个有理函数.

即使是定义在通常平面上的简单单值函数，它的积分也可以是多值的. 例如

$$\int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = w + n\pi,$$

其中 w 是沿着譬如说由 0 到 z 的直线路径的积分的值，而 n 则依赖于由 0 到 z 的路径绕 $\pm i$ 的情形. 同样，在一个 Riemann 面上的单值函数，例如在这曲面上的 w 和 z 的一个有理函数，这种函数的积分就可能是多值的. 这确实会发生. 如果引进横剖线使曲面成为单连通的，而且如果积分路径是从 z_1 到 z_2，每当路径穿过横剖线一次，积分的基本值 U 上就加一个常数值 I，这个基本值 U 是在曲面的一个单连通部分的一个路径上积分的值. 如果路径在同一个方向穿过横剖线 m 次，则值 mI 就被加到 U 上. 常数 I 称为一个周期模，每一横剖线引进它自己的周期模，而如果曲面的连通数是 $N+1$，就有 N 个线性无关的周期模. 设它们是 $I_1, I_2, \cdots, I_n$. 那么原来的单值函数沿着原来路径的积分的值就是

$$U + m_1 I_1 + m_2 I_2 + \cdots + m_n I_n,$$

其中 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 为整数. 这些 I_i 在一般情形下是复数.

9. Abel 积分与 Abel 函数

Riemann 在《数学杂志》① 上发表的四篇重要论文中,重述了他的博士论文中的许多思想,它们主要是用于研究 Abel 积分与 Abel 函数的. 第四篇论文对所论课题赋予了较重要的进展. 所有四篇论文都难懂:"它们是一本莫名其妙的书."幸运的是,后来一些优秀的数学家详细阐述并解释了这些材料. Riemann 将 Abel 和 Jacobi 的工作结合在一起(它们大部分渊源于实函数),并结合了 Weierstrass 的处理方法(它用了复函数).

因为 Riemann 澄清了多值函数的概念,所以对于 Abel 积分他可以更清楚些. 设 $f(w, z)=0$ 是一个 Riemann 面的方程,并设 $\int R(w, z)\mathrm{d}z$ 是这 Riemann 面上的 w 和 z 的一个有理函数的积分. Riemann 将 Abel 积分分类如下:在由方程 $f(w, z)=0$ 确定的 Riemann 面上 w 和 z 的有理函数的积分中,有一些是处处有穷的,虽然在未剖割的曲面上它们是多值函数. 这些积分称为第一类积分. 这样的线性无关的积分的个数等于曲面的亏格 p,如果连通数是 $2p+1$. 如果引进 $2p$ 个横剖线,则每一个积分对于横剖线所包围的一个区域中的路径来说是一个单值函数. 如果路径穿过一条横剖线,那么前节中讨论过的周期模必须考虑进去,并且积分之值如下:如果 W 是它从一个固定点到 z 的值,那么所有可能的值是

$$W+\sum_{r=1}^{2p} m_r\omega_r,$$

其中 m_r 是整数,ω_r 是这个积分的周期模.

第二类积分有代数的无穷但不是对数的无穷. 一个第二类的基本积分在 Riemann 面的一点处有一个一阶的无穷. 如果 $E(z)$

① Vol. 54, 1857, 115 ~ 155 = *Werke*, 88~144.

是这积分在曲面一点处的值(积分的上限),那么积分的所有的值都包含在

$$E(z)+\sum_{r=1}^{2p}n_r\varepsilon_r$$

中,其中 n_r 是整数,ε_r 是这个积分的周期模.在 Riemann 面的同一点处变为无穷的两个基本积分,它们的差是一个第一类积分.由此可以推断,有 $p+1$ 个线性无关的第二类基本积分,在 Riemann 面的同一点上变为无穷.

具有对数无穷的积分称为第三类积分.可以证明,每一个积分必定有两个对数无穷.如果这样的一个积分没有代数无穷,也就是说,在它有对数无穷的任何一点的附近,积分的展开式中没有代数项,那么这个积分就称为第三类的基本积分.有 $p+1$ 个第三类的线性无关的基本积分,它们的对数无穷同在 Riemann 面的两个点上.每一个 Abel 积分是这三类积分的一个和.

Abel 积分的分析阐明了在 Riemann 面上能够存在哪些种类的函数. Riemann 研究了两类函数;第一类是曲面上的单值函数,它的奇点是极点.第二类在具有横剖线的曲面上是单值的,但沿着每一横剖线是不连续的函数.事实上,这种函数在第 ν 个横剖线的一边的值和它在另一边的值相差一个复常数 h_ν. 这第二类函数也可以有极点和对数无穷. Riemann 证明,第一类函数是代数函数,而第二类函数是代数函数的积分.

在曲面上也有处处为有穷的函数.这样的一个函数可以用上面的第一类函数表示出来,也可以将第二类和第三类积分结合起来以构造曲面上的代数函数.于是 Riemann 证明了,代数函数可以用超越函数的和来表示.同样,在若干个给定点上为代数无穷的单值函数可以用有理函数表示.在整个曲面上单值的函数是一个处处为有穷的积分的被积函数.这个函数可以表示成 w 和 z 的一个有理函数,并且可以有形式 $\phi(w,z)/\partial f/\partial w$,其中 $f(w,z)=0$

是曲面的方程. 出现在这里和第一类积分的构造之中的函数 ϕ,称为 $f(w,\ z)=0$ 的伴随多项式. 一般说来,当 f 的次数是 n 时,它的次数是 $n-3$.

Riemann 面上的有理函数的重要性来自刚才提到的事实,即在曲面上单值并且没有本性奇点的每一个函数是一个有理函数. 这样一个函数的零点的个数与极点的个数相同,并且以相同次数取每一个值. 而且,一旦定义曲面的方程 $f(w,\ z)=0$ 被固定下来,那么,曲面上位置的所有其他函数在总体上是和 w 与 z 的有理函数及其积分同样广阔的.

Weierstrass 在 19 世纪 60 年代也研究了 Abel 积分,不过他和这一领域中的 Riemann 的后继者是由代数函数来建立超越函数的,与 Riemann 的做法相反. 他们这样做是因为他们有理由不相信 Dirichlet 原理. Weierstrass 在 1870 年宣读的一篇论文[①]中指出,极小化 Dirichlet 积分的函数的存在还没有证明. Riemann 自己有另外一个想法. 在 Weierstrass 作出他的陈述以前,Riemann 已认识到 Dirichlet 积分的极小化函数的存在问题,不过他说,Dirichlet 原理只是一个碰巧合用的方便工具;他说,函数 u 的存在却仍然是正确的. 对于这一点 Helmholtz 的意见也是有趣的:"……对于我们物理学家来说,Dirichlet 原理(的应用)仍然是一个证明."[②]

Riemann 发起的复函数理论中的另一个新的研究是 Abel 积分的反演,即当

$$u=\int_0^z R(z,\ w)\mathrm{d}z$$

时,把 z 确定为 u 的函数,当然 w 和 z 是由一个代数方程联系着的. 这个 u 的函数 z 不仅是多值的而且不能清楚地定义出来. 像

---

① *Werke*, 2,49~54.

② Dirichlet 问题和 Dirichlet 原理的后来历史,见第 28 章第 4 节和第 8 节.

在超椭圆积分的情形一样，Riemann 取 p 个 Abel 积分的和，并定义新的 p 个变量的 Abel 函数，它们是单值的并且是 $2p$ 重周期的. p 个变量的 $2p$ 重周期的一个函数的意思是，存在 $2p$ 组量 $\omega_{1k}, \omega_{2k}, \cdots, \omega_{pk}, k=1, 2, \cdots, 2p$，每一组包含这 p 个变量的每一个变量的一个周期. Riemann 证明，一个单值函数不可能有多于 $2p$ 组的同时周期. Abel 函数表成 p 个变量的 θ 函数，是椭圆函数的推广.

在亏格为 p 的 Riemann 面上的函数的一个值得注意的结果，现在通称为 Riemann-Roch 定理. 这个结果的工作，是由 Riemann 开始并由 Gustav Roch(1839—1866)①完成的. 本质上，这个定理确定了在至多有有穷个极点的曲面上线性无关的亚纯函数的个数. 更明确地说，假定 w 是这曲面上的一个单值函数，在点 $c_1, c_2, \cdots, c_m$ 处有一阶极点，但在别处没有，这些 c_i 的位置不一定互相独立. 如果 q 个线性无关的函数(伴随函数)在这些点上为零，那么 w 含有 $m-p+q+1$ 个任意常数. 它是 $m-p+q$ 个函数的任意倍数的线性组合，这 $m-p+q$ 个函数的每一个都有 $p-q+1$ 个一阶极点，其中 $p-q$ 个是线性组合中的所有函数所共有的.

10. 保形映射

Riemann 为了完善他的博士论文的理论，在结束时给出了函数论在保形映射的几个应用. 从一个平面到另一个平面的保形映射的一般性问题(它是由绘制地图而来的)是 Gauss 在 1825 年解决的. 他的结果相当于这样一个事实，即保形映射是由任何一个解析的 $f(z)$ 建立的——虽然 Gauss 没有用复函数理论. Riemann 知道一个解析函数建立了从 z 平面到 w 平面的保形映射，但他关心的是将此推广到 Riemann 面. 这就在保形映射中开辟了新的

① *Jour. für Math.*, 64, 1864, 372～376.

一章.

Riemann 在论文的结尾给出了下述定理:两个给定的单连通平面(他将 Riemann 面上的单连通区域包括进去)可以一对一地并且保形地相互映射,一曲面的一个内点和一个边界点可以对应到另一个曲面上的任意选取的一个内点和一个边界点.整个的映射便由此被确定了.这个定理包含了以下基本结果作为一个特殊情形:给定任何一个单连通区域 D,它的边界不止一个点,又给定了这个区域的一点 A 以及在这点的一个方向 T,那么存在一个函数 $w=f(z)$,在 D 内解析并保形地一对一地把 D 映射到 w 平面上中心在原点而半径为 1 的圆.在这个映射下 A 变到原点,T 变到正实轴方向.这后一个叙述通常称为 Riemann 映射定理.

Riemann 是用 Dirichlet 原理来证明它的定理的,但由于这个原理当时已被看出有毛病,所以数学家们就寻求一个正确的证明. Carl Gottfried Neumann 和 Hermann Amandus Schwarz 在 1870 年证明了,可以将一个单连通平面区域映射到一个圆.可是,他们不能够处理多叶的单连通区域.

顺便说一下,强调一个单连通区域到一个圆的保形映射的原因是由于这样的事实:将一个单连通区域保形映射到另一个单连通区域,只需将每一个区域映射到一个圆,然后做两个保形映射的乘积就可达到目的.

虽然 Riemann 映射定理的证明尚未解决,但是保形映射的一些特殊结果却被得到了.其中对于解偏微分方程最有用的一个是 Schwarz① 和 Elwin Bruno Christoffel② 给出的.他们的定理说明如何把 z 平面上的一个多边形及其内部(图 27.8)保形映射到 w 平面的上半部.这个映射由下面的积分给出:

---

① *Jour. für Math.*, 70, 1869, 105 ~ 120 = *Ges. Abh.*, 2, 65 ~ 83.

② *Annali di Mat.*, (2), 1, 1867, 95 ~ 103 和 (2), 4, 1871, 1 ~ 9 = *Ges. Abh.*, 2, 56 ff.

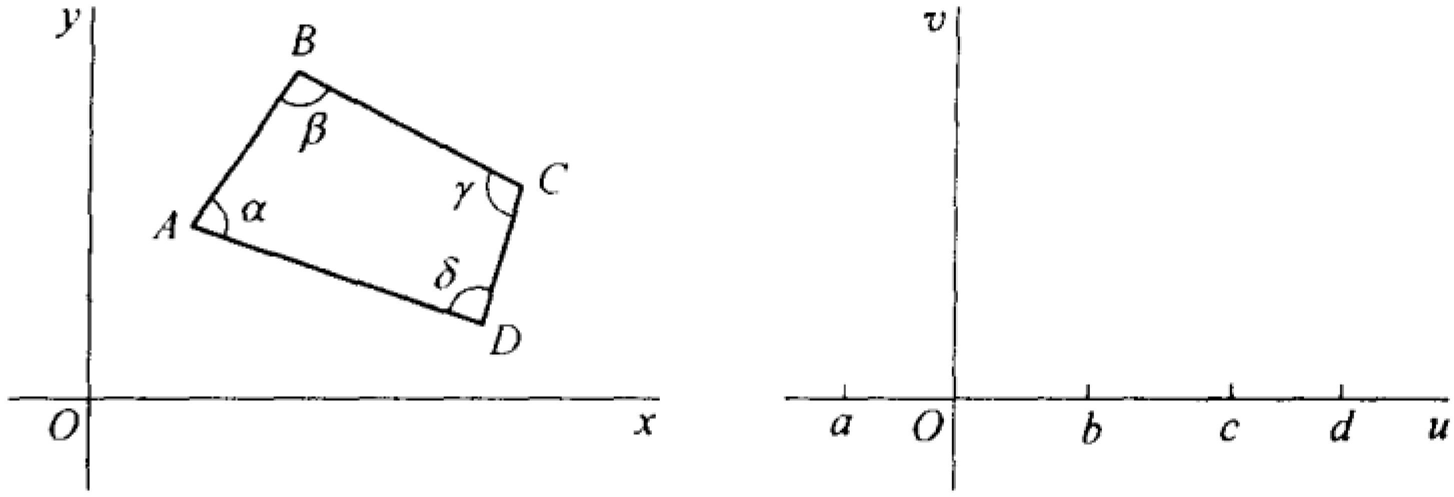


图 27.8

$$z = c\int_0^z (w-a)^{(\alpha/\pi)-1}(w-b)^{(\beta/\pi)-1}\cdots dw + c',$$

其中 c 和 c' 可以从多边形的位置确定出来，而 $a, b, c, \cdots$ 对应于 $A, B, C, \cdots$. 这个映射对于求解位势(Laplace)方程是很有用的.

11. 函数的表示与例外值

19 世纪后期，复函数的理论迅速发展，我们将有机会在以后几章中考虑这些发展的某些部分. 可是，在许多创造中，有少数几个原来就与复函数本身直接关联着的却要在这里先提一下.

在单值复函数中，相当重要的一种是整函数(就是在平面的有穷部分没有奇点的函数，它包括多项式，e^z，$\sin z$，$\cos z$)，因为粗略地说，它们是初等实函数的类似物. 对于这种函数，Liouville 定理说，每一个有界的整函数是一个常数①. Weierstrass 把实多项式分解为线性因式的定理推广到了整函数，他建立这个定理②大概是在 19 世纪 40 年代. 这定理称为因式分解定理，是这样说的：如果$G(z)$是一个整函数，不恒等于零，但有无穷多个根(即不是一个

① 这个定理是属于 Cauchy 的(*Comp. Rend.*, 19, 1844, 1377 ～ 1381 = *Œuvres*, (1), 8, 378～385). C. W. Borchardt 在 Liouville 1847 年的演讲中听到了这个定理，因而把它归于 Liouville.

② *Abh. König. Akad. der Wiss.*, *Berlin*, 1876, 11 ～ 60 = *Werke*, 2, 77～124.

多项式),那么 $G(z)$ 可以写成一个无穷乘积

$$G(z) = \Gamma(z)z^m\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{g_n(z)},$$

其中
$$g_n(z) = \frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{m_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{m_n};$$

$\Gamma(z)$ 是一个没有零点的整函数;a_n 是 $G(z)$ 的零点;z^m 表示在 $z=0$ 的 m 重零点(如果 $G(z)$ 有这样一个零点的话),乘积的各因式称为 $G(z)$ 的质因式.

复杂性仅次于整函数的是亚纯函数,它在复平面的有穷部分只能有极点. Weierstrass 在 1876 年①的论文中证明,一个亚纯函数可以表示为两个整函数的商. 这个定理由 Gösta Mittag-Leffler (1846—1927)在 1877 年的一篇论文中加以推广②. 在任意一个区域上的亚纯函数可以表示为两个函数的商,其中每一个都在该区域内解析. 在 Weierstrass 定理和 Mittag-Leffler 定理中,分子和分母都不在区域的同一点上为零.

另外一个引起许多数学家注意的论题是各种类型的复函数能够取值的范围. 在这方面,(Charles)Emile Picard(1856—1941)得到一系列结果. 他是巴黎大学的高等分析的教授,也是巴黎科学院的永久书记. Picard 在 1897 年③证明,对一个整函数而言,如果它不退化为一常数的话,最多只能有一个有穷值它达不到;并且如果存在至少两个这样的值,其中每一个只被取有穷次,那么这个函数就是一个多项式. 否则,除去这例外的一个以外,这个函数要无穷次地取到每一个值. 如果这个函数是亚纯的,则无穷是一个可取的值,最多有两个值可以不取,而不使函数退化为一常数.

在同一篇论文中,他发展了 Julian W. Sochozki(1842—1927)

---

① *Abh. König. Akad. der Wiss.*, *Berlin*, 1876, 11～60 = *Werke*, 2, 77～124.

② *Öfversigt af Kongliga Vetenskops-Akademiens Förhandlingar*, 34, 1877, #1, 17～43;亦见 *Acta Math.*, 4, 1884, 1～79.

③ *Ann. de l'Ecole Norm. Sup.*, (2), 9, 1880, 145～166.

和 Weierstrass 的一个结果,证明了在一个孤立本性奇点的任何邻域内,一个函数要取到所有的值,最多可能有一个(有穷)值例外.这个结果是深刻的,并且有许多推论.确实,其他一些结果和可供选择的证明产生了,它们把这个论题很好地带入了20世纪.

在复函数这门学科中,19世纪结尾时回到了基础方面.19世纪 Cauchy 积分定理的证明用到 df/dz 为连续的事实.Edouard Goursat(1858—1936)证明了①,沿着一条闭曲线 C 的 Cauchy 定理,$\int f(z)dz=0$,而没有假定在曲线 C 所围成的闭区域内导数 $f'(z)$ 连续.$f'(z)$ 的存在已是充分的.Goursat 指出,$f(z)$ 的连续与导数的存在已足够刻画解析性.

像我们概述复函数理论的兴起时所指出的,Cauchy,Riemann 和 Weierstrass 是函数论的三个主要奠基人.在一段长时间内他们各自的思想和方法被他们的追随者各自继续研究着.后来 Cauchy 和 Riemann 的思想被融合起来了,而 Weierstrass 的思想逐渐从 Cauchy-Riemann 观点推导出来,因而不再强调从幂级数出发的思想.而且 Cauchy-Riemann 观点的严密性被改进了,以至从这个观点看来 Weierstrass 的探讨途径不是本质的.完全的统一只是在20世纪开头时才实现.

参考书目

Abel, N. H.: *Œuvres complètes*, 2 vols., 1881, Johnson Reprint Corp., 1964.

Abel, N. H.: *Mémorial publié à l'occasion du centénaire de sa naissance*, Jacob Dybwad, Kristiania, 1902.

Brill, A., and M. Noether: "Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit", *Jahres. der Deut. Math.-Verein.*, 3, 1892/1893, 109~556, 155~186 in particular.

Brun, Viggo: "Niels Henrik Abel. Neue biographische Funde", *Jour. für Math.*,

① *Amer. Math. Soc., Trans.*, 1, 1900, 14~16.

193,1954,239～249.

Cauchy, A. L.: *Œuvres complètes*, 26 vols., Gauthier-Villars, 1882～1938, relevant papers.

Crowe, Michael J.: *A History of Vector Analysis*, University of Notre Dame Press, 1967, Chap. 1.

Enneper, A.: *Elliptische Funktionen: Theorie und Geschichte*, 2nd ed., L. Nebert, 1890.

Hadamard, Jacques: *Notice sur les travaux scientifiques de M. Jacques Hadamard*, Gauthier-Villars, 1901.

Jacobi, C. G. J.: *Gesammelte Werke*, 7 vols. and Supplement, G. Reimer, 1881～1891; Chelsea reprint, 1968.

Jourdain, Philip E. B.: "The Theory of Functions with Cauchy and Gauss", *Bibliotecha Mathematica*, (3),6,1905,190～207.

Klein, Felix: *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im* 19, *Jahrhundert*, 2 vols., Chelsea (reprint), 1950.

Lévy, Paul, et al.: "La Vie et l'œuvre de J. Hadamard", *L'Enseignement Mathématique*, (2), 13,1967,1～72.

Markuschewitsch, A. I.: *Skizzen zur Geschichte der analytischen Funktionen*, V E B Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1955.

Mittag-Leffler, G.: "An Introduction to the Theory of Elliptic Functions", *Annals of Math.*, 24,1922/1923,271～351.

Mittag-Leffler, G.: "Die ersten 40 Jahre des Lebens von Weierstrass", *Acta Math.*, 39,1923,1～57.

Ore, O.: *Niels Henrik Abel, Mathematician Extraordinary*, University of Minnesota Press, 1957.

Osgood, W. F.: "Allgemeine Theorie der analytischen Funktionen", *Encyk. der Math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1901～1921, Ⅱ B1,1～114.

Reichardt, Hans, ed.: *Gauss: Leben und Werk*, Haude und Spenersche Verlags-buchhandlung, 1960; B. G. Teubner, 1957,151～182.

Riemann, Bernhard: *Gesammelte mathematische Werke*, 2nd, ed., Dover (reprint), 1953.

Schlesinger, L.: "Über Gauss' Arbeiten zu Funktionenlehre", *Nachrichten König. Ges. der Wiss. zu Gött.*, 1912, Beiheft, 1～143; also in Gauss's *Werke*, 10_2,77 ff.

Smith, David Eugene: *A Source Book in Mathematics*, 2 vols., Dover (reprint), 1959, pp. 55～66,404～410.

Staeckel, Paul: "Integration durch imaginäres Gebiet", *Bibliotecha Mathematica*, (3), 1,1900,109～128.

Valson, C. A.: *La Vie et les travaux du baron Cauchy*, 2 vols., Gauthier-Villars, 1868.

Weierstrass, Karl: *Mathematische Werke*, 7 vols., Mayer und Müller, 1895～1924.

第 28 章

19 世纪的偏微分方程

对自然界的深刻研究是数学最富饶的源泉.

Joseph Fourier

1. 引　　言

诞生于 18 世纪的偏微分方程这门学科,在 19 世纪发展起来了.随着物理科学所研究的现象在广度和深度两方面的扩展,微分方程的新的类型的数目增加了;即使是已知的类型,如波动方程和位势方程也应用到新的物理领域了.偏微分方程变成并继续成为数学的中心.它们对物理科学的重要性还只是它们取得这中心位置的原因之一.从数学自身的角度看,偏微分方程的求解促使数学需要在函数论、变分法、级数展开、常微分方程、代数、微分几何等各方面发展.课题是变得这样广泛,以至在这一章里我们只能给出其主要结果的一小部分.

我们今天习惯于按类型把偏微分方程分类.但在 19 世纪初期,对这学科知道得还很少,以至区分各种类型的思想还不可能出现.是物理问题指挥着应该探讨何种方程,而数学家们则随便地从一种类型的问题转到另一种类型而不觉察其间有某些我们现在认为是基本的差别.物理世界过去和现在都是从不关心数学家们的分类的.

2. 热方程与 Fourier 级数

19 世纪的第一个大步,并且是真正极为重要的一步,是由

Joseph Fourier(1768—1830)迈出的. Fourier 年轻时是一个很出色的数学学者,但他专志于当一个军官. 因为他是一个裁缝的儿子而被拒绝任命,他便转谋教士职位. 当他曾经就读过的军事学校委之以教授职位时他接受了,同时数学就变成了他终生的爱好.

像他同时代的其他科学家一样,Fourier 从事热流动的研究. 对热流有兴趣,作为实际问题,在工业上是为了处理金属,作为科学问题,是企图确定地球内部的温度,这温度随时间的变化,以及其他同类问题. 1807 年①,他向巴黎科学院呈递了一篇关于热传导的基本论文,这篇论文经 Lagrange, Laplace 和 Legendre 审评后被拒绝了. 但科学院的确想鼓励 Fourier 发展他的思想,所以把热传导问题定为将于 1812 年授予高额奖金的课题. Fourier 在 1811 年呈递了修改过的论文,受到上述诸人和另外一些人审评,得到了奖金,但因受到缺乏严密性的评论而未发表在当时的科学院的《报告》里. Fourier 对他所受到的待遇感到愤恨. 他继续对热的课题进行研究,在 1822 年发表了数学的经典文献之一——《热的解析理论》(*Théorie analytique de la chaleur*)②,编入了他实际上未作改动的 1811 年论文的第一部分. 此书是 Fourier 的思想的主要出处. 两年以后,他成为科学院的秘书,于是能够把他 1811 年的论文原封不动地发表在《报告》③里.

在吸收或释放热的物体内部,温度分布一般是不均匀的,在任何点上都随时间而变化. 所以温度 T 是空间和时间的函数. 函数的准确形式依赖于物体的形状、密度、材料的比热、T 的初始分布(即在时刻 $t=0$ 时 T 的分布)以及保持于物体表面上的条件. Fourier 在他的书中考虑的第一个主要问题是在均匀和各向同性

---

① 其手稿今保存在交通工程学校(*Ecole des Ponts et Chaussées*)的图书馆里.

② *Œuvres*, 1.

③ *Mém. de l'Acad. des Sci.*, *Paris*, (2),4,1819/1820,185~555,1824 年版和 5,1821/1822,153~246,1826 年版;仅第二部分转载于 Fourier 的《全集》里,2,3~94.

的物体内确定作为 x、y、z、t 的函数的温度 T. 根据物理原理他证明了 T 必须满足偏微分方程

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)=k^2\frac{\partial T}{\partial t}, \tag{1}$$

叫做三维空间的热方程,其中 k^2 是一个常数,其值依赖于物体的质料.

Fourier 当时解决了特殊的热传导问题. 我们将考虑一种对他的方法说来是典型的情形,即对两端保持在温度 0°,侧面绝热因而无热流通过的柱轴,求解方程(1)的问题. 因为这根轴只涉及一维空间,故(1)变成

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=k^2\frac{\partial T}{\partial t}, \tag{2}$$

附以边界条件

$$T(0,\ t)=0,\ T(l,\ t)=0,\ t>0 \tag{3}$$

和初始条件

$$T(x,\ 0)=f(x),\ 0<x<l. \tag{4}$$

为解出这个问题,Fourier 用了变量分离法. 他令

$$T(x,\ t)=\phi(x)\psi(t). \tag{5}$$

代入微分方程后,得到

$$\frac{\phi''(x)}{k^2\phi(x)}=\frac{\psi'(t)}{\psi(t)}.$$

然后他阐明(参看第 22 章的[30]),这两个比值必须是常数,假定为 $-\lambda$,因此有

$$\phi''(x)+\lambda k^2\phi(x)=0 \tag{6}$$

和

$$\psi'(t)+\lambda\psi(t)=0. \tag{7}$$

因此,根据(5),边界条件(3)蕴涵着

$$\phi(0)=0 \text{ 和 } \phi(l)=0. \tag{8}$$

(6)的通解是　$\phi(x)=b\sin(\sqrt{\lambda}kx+c)$.

条件 $\phi(0)=0$ 蕴涵着 $c=0$. 条件 $\phi(l)=0$ 给 λ 加上了限制,即$\sqrt{\lambda}$ 必须是 π/kl 的整数倍. 所以 λ 有无穷多个可取的值 λ_ν,或

$$\lambda_\nu=\left(\frac{\nu\pi}{kl}\right)^2,\ \nu \text{ 为整数}. \tag{9}$$

这些 λ_ν 就是我们现在称作的本征值或特征值.

因为(7)的通解是指数函数,但现在 λ 限于取 λ_ν,于是由(5),Fourier 到此得到

$$T_\nu(x,t)=b_\nu e^{-(\nu^2\pi^2/k^2l^2)t}\sin\frac{\nu\pi x}{l},$$

其中 b_ν 目前表示在 b 位置上的常数,而 $\nu=1,2,3,\cdots$. 然而方程(2)是线性的,所以诸解的和仍然是解. 故可以断言

$$T(x,t)=\sum_{\nu=1}^{\infty}b_\nu e^{-(\nu^2\pi^2/k^2l^2)t}\sin\frac{\nu\pi x}{l}. \tag{10}$$

为了满足初始条件(4),对 $t=0$ 必须有

$$f(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}b_\nu\sin\frac{\nu\pi x}{l}. \tag{11}$$

于是 Fourier 面临着这样的问题:$f(x)$能表示成三角级数吗? 特别是 b_ν 能确定吗?

Fourier 进而回答这些问题. 虽然那时他略为意识到有严密性的问题,但他仍以 18 世纪的风气形式地进行着. 为了领悟 Fourier 的工作,为简单起见,我们将设 $l=\pi$. 这样我们考虑

$$f(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}b_\nu\sin\nu x,\ 0<x<\pi. \tag{12}$$

Fourier 把每个正弦函数按 Maclaurin 定理展开为幂级数;即他用

$$\sin\nu x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\nu^{2n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} \tag{13}$$

替换(12)式中的 $\sin\nu x$. 然后用一个当时认为无问题的变换求和次序的运算,他得到

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\Big(\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^{2n-1}b_\nu\Big)x^{2n-1}. \tag{14}$$

这样 $f(x)$就表成了 x 的幂级数,这隐含着在 Fourier 讨论的可容许函数 $f(x)$上加了一个事先没有假定的强限制,即这个幂级数必须是 $f(x)$的 Maclaurin 级数,因此

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^{k}. \tag{15}$$

令(14)和(15)中 x 的同次幂的系数相等,Fourier 发现,对偶数 k, $f^{(k)}(0)=0$, 而除此之外,则有

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^{2n-1}b_{\nu}=(-1)^{n-1}f^{(2n-1)}(0),\ n=1,2,3,\cdots$$

现在 $f(x)$的诸导数是已知的,因为 $f(x)$是已给的一个初始条件.所以 b_ν 是无穷线性代数方程组里的未知数的一个无穷集合.

在先前的一个问题中,Fourier 面临着同类的方程组,那里他取前 k 项和前 k 个方程的右端常数,解前 k 个方程得 $b_{\nu,k}$,表示 b_ν 的近似值,得到了 $b_{\nu,k}$的一般表示式时,他就大胆地下结论说: $b_\nu=\lim\limits_{k\to\infty}b_{\nu,k}$. 然而,这一次他要确定 b_ν 却有许多困难. 他对几个不同的 $f(x)$,用非常复杂的、包含发散表示式的程序说明了如何确定 b_ν. 用这些特殊情形作为指导,他得到了 b_ν 的、含有无穷乘积及无穷和的一个表达式,Fourier 觉得这个表达式相当无用. 经过更为大胆和富于创造性的、虽然往往又是含糊的几步,他得到了公式

$$b_{\nu}=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(s)\sin\nu s\,ds. \tag{16}$$

这结论在一定程度上说并不是新的. 我们已经说到(第 20 章第 5 节),Clairaut 和 Euler 已经怎样把某些函数展开为 Fourier 级数并得到公式

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\\ b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx,\end{aligned}\qquad n\geqslant 1. \tag{17}$$

此外,Fourier 这样得到的结果是很局限的,因为他假定了 $f(x)$有

Maclaurin 展开,这意味着有无穷阶导数. 最后,Fourier 方法确实是不严密的,并且比 Euler 的方法更为复杂. Fourier 不得不用无穷线性方程组,而 Euler 却用三角函数的性质做得更为简单.

但这时 Fourier 作了一些值得注意的观察. 他注意到每一个 b_ν 可以解释为 x 取值 0 到 π 时,曲线 $y=(2/\pi)f(x)\sin\nu x$ 下方的面积. 这样一个面积即使对很随意的函数都是有意义的. 这种函数不必是连续的,或者只要从图形上知道就可以了. 所以 Fourier 下结论说,每一个函数都可以表示为

$$f(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}b_\nu\sin\nu x,\quad 0<x<\pi. \tag{18}$$

当然,这个可能性除 Daniel Bernoulli 以外,已被 18 世纪的名家否定了.

Fourier 对其前人的工作知道多少是不清楚的. 在 1825 年的文章中他说 Lacroix 已告诉他关于 Euler 的工作,但他没有说何时告诉他的. 无论如何,Fourier 并没有被前人的意见所吓住. 他选取了大量的函数,对每个函数计算头几个 b_ν,并对每个函数作出正弦级数(18)的头几项和的图形. 从这一图形他得出结论说,不管在区间 $0<x<\pi$ 外怎样,这个级数在 $0<x<\pi$ 上总是表示 $f(x)$的. 在书中(第 198 页)他指出,两个函数可在一给定的区间上相合,但不一定在此区间外相合. 看不到这一点,说明了早期的数学家为什么不能接受任意一个函数可展开为三角级数的原因. 在目前的情形下,级数真正给出的是函数在 0 到 π 区间上的值,在区间外则周期地重复着.

Fourier 一旦得到了上述关于 b_ν 的简单结果,他就像 Euler 一样了解到每个 b_ν 可以由级数(18)乘以 $\sin\nu x$,再从 0 到 π 积分而得到. 他又指出这个程序可以应用于表达式

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu\cos\nu x. \tag{19}$$

他接着考虑任何 $f(x)$在区间$(-\pi,\ \pi)$的表达式. 级数(18)表示一个奇函数 $[f(x)=-f(-x)]$，而级数(19)表示一个偶函数 $[f(x)=f(-x)]$. 但任何函数可以表示为一个奇函数 $f_0(x)$与一个偶函数 $f_e(x)$之和，这里

$$f_0(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)],\ f_e(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)].$$

于是任何 $f(x)$在区间$(-\pi,\ \pi)$上可以表示为

$$(20)\qquad f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x),$$

而其系数可经遍乘 $\cos\nu x$ 或 $\sin\nu x$ 再从 $-\pi$ 到 π 积分来确定，这就给出了(17).

Fourier 对"任意"的函数可以表成(20)那样的级数一事从未给出过任何完全的证明. 在那本书中他给出一些严密的论证，在他关于这事的最后讨论里(第 415 节、416 节和 423 节)，给出了一个证明的概要；但即使在那里，Fourier 仍没有说出一个函数可以展开为三角级数必须满足的条件. 虽然如此，Fourier 对这种可能性的信念是表现于整本书里的. 他还说[①]，不管 $f(x)$怎样，不管是否可给 $f(x)$以解析表达式，不管函数是否服从任何正规的法则，他的级数总是收敛的. Fourier 关于任何函数可以展开为 Fourier 级数的信念是建立在前述几何证据上的. 关于这点他在该书(第 206 页)中说道："为了证实新结果的真实性，为了明白

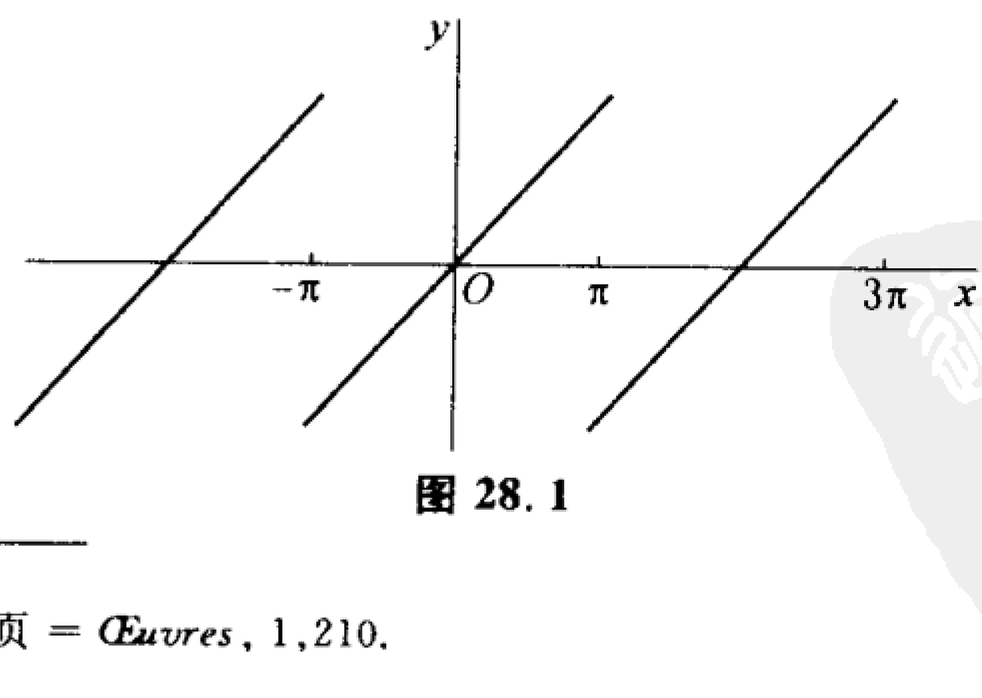


图 28.1

① 第 196 页 = *Œuvres*, 1,210.

地给出分析学常用的表达形式,没有什么比几何图形对我们更适宜了."

Fourier 的工作渗透到几个主要的进展之中.除促进偏微分方程的理论外,他迫使函数概念作一种修改.假设函数 $y=x$ 在区间 $(-\pi,\ \pi)$ 内由 Fourier 级数(20)表示出来,则这级数的性态就在每个长为 2π 的区间上重复着.因此这级数给出的函数看起来像图 28.1 所显示的那样.这样的函数不能用单个(有限的)解析式表示,然而 Fourier 的先驱者都曾坚持一个函数必须是可用单个式子表示的.因为对所有 x,整个函数 $y=x$ 不能用级数表示,他们就不能看出任意的非周期函数怎样可用这类级数来表示了.虽然 Euler 和 Lagrange 实际上都曾经对特殊的非周期函数这样做过. Fourier 明白,他的级数也可以表示在区间 $(0,\ \pi)$ 或 $(-\pi,\ \pi)$ 的不同部分有不同解析式的函数,不管这些表示式互相是否连续地接合着.最后他指出,在 Daniel Bernoulli 的赞助下,他的工作解决了关于弦振动问题的解的争论. Fourier 的工作标志着人们从解析函数或可展成 Taylor 级数的函数中解放了出来.以下的事情也是重要的:一个 Fourier 级数在一整段区间上表示一个函数,而一个 Taylor 级数仅在函数是解析的点附近表示该函数(虽然在特殊情形下其收敛半径可以是无穷大).

我们已经注意到,Fourier 1807 年的论文没有很好地被巴黎科学院接受,文中他坚持认为任意函数可以展开为三角函数. Lagrange 特别坚决地否认这种展开的可能性.虽然他仅仅批评了该论文缺乏严密性,但他确实被 Fourier 所持的函数的普遍性所困惑,因为 Lagrange 仍然相信函数是由其在任意小区间上的值所决定的(这对解析函数是正确的).事实上 Lagrange 重返到弦振动问题,并且没有比他早期工作显示出更好的洞察力,而坚持为 Euler 关于任意函数不可能展开为三角级数的争论辩护. Poisson 后来确实断言 Lagrange 指出过任意函数可以表示为 Fourier 级数,但

Poisson 是妒忌 Fourier 的,他说这话是为了抢夺 Fourier 的名誉而归之于 Lagrange.

Fourier 的工作还弄明白了另一件在 18 世纪 Euler 和 Lagrange 的著作中还不清楚的事情. 这些人为了解一些特殊问题,已经把函数按 Bessel 函数或 Legendre 多项式展开为级数了. 函数可以展开为像三角函数、Bessel 函数、Legendre 多项式这样一些函数的级数,这个普遍性事实是由 Fourier 的工作揭露出来的. 他进一步说明了施加于偏微分方程的解的初始条件可以怎样被满足,因此推进了解这类方程的技术. Fourier 1811 年的那篇论文,虽然到 1824—1826 年才发表,但当时对别人是易于接受的,他的思想最初是勉强地得到承认,但最后赢得了赞许.

Fourier 的方法立即被 Siméon-Denis Poisson(1781—1840)吸取. Poisson 是 19 世纪最大的分析学家之一,又是第一流的数学物理学家. 虽然他父亲要他学医,但他却先后成为 19 世纪法国数学家的发源地——多科工艺学校的学生和教授. 他从事于热的理论方面的工作,是弹性的数学理论的奠基人之一,又是最先提出把引力位势理论移植到静电磁学的人之一.

Poisson 对 Fourier 关于任意函数都可以展开为函数的级数的证据有极深刻的印象,以至他相信所有偏微分方程都可以用级数展开来求解;这级数的每一项本身是一些函数的乘积,每个函数是一个独立变量的函数(参看[10]). 他想,这些展开式包括了最一般的解. 他还相信,如果一个展开式发散,就意味着应当寻找一个以其他函数表出的展开式. 当然他是太过分地乐观了.

大约从 1815 年起 Poisson 本人解决了许多热传导问题,并使用了按三角函数、Legendre 多项式、Laplace 曲面调和函数的展开式. 这工作的某一些我们将会在以后碰到. Poisson 关于热传导方面的许多工作表述在他的书《热的数学理论》(*Théorie mathématique de la chaleur*, 1835)中.

3. 封闭解;Fourier 积分

尽管有偏微分方程的 Fourier 级数解法的成功与冲击,19 世纪主要努力之一仍然是要寻求封闭形式的解,即用初等函数及其积分表示的解.这样的解,至少是 18 世纪和 19 世纪初已知的类型的解,在计算中是更易于掌握的,更明白的,并且是更易于使用的.

用封闭形式解偏微分方程的最重要的方法是 Fourier 积分,它起源于 Laplace 开创的工作.这思想应当归源于 Fourier, Cauchy, Poisson.把这个重要发现的优先权归给谁是不可能的,因为这三个人都向科学院宣读了直到一个时期以后才发表出来的论文,但每人都听过别人的论文,无法从出版物中确定什么东西是每个人取自口头报告的.

Fourier 在 1811 年得奖论文的最后一节里,讨论了在一个方向延伸到无穷远的区域内热的传导问题.为了得到这类问题的解答,他从有界区域的热方程的解的普遍形式出发,即(参看[10])

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-kq_n^2 t} \cos q_n x, \tag{21}$$

其中 q_n 由边界条件确定,a_n 由初始条件确定.这时 Fourier 把 q_n 看作曲线的横坐标,把 a_n 看作曲线的纵坐标.于是 $a_n = Q(q_n)$,其中 Q 是 q 的某一函数.然后他把(21)换成

$$u = \int_0^{\infty} Q(q) e^{-kq^2 t} \cos qx \, dq \tag{22}$$

并设法确定 Q.他回到关于系数的公式

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \phi(x) \cos nx \, dx,$$

其中 $\phi(x)$ 通常就是初始函数.利用把 a_n 换成 Q、把 n 换成 q 的"极限过程",他得到

(23)
$$Q = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} F(x)\cos qx\,dx,$$
其中 $F(x)$是偶函数,是在该无穷区域上给定的初始温度. 然后把(23)用于(22),并交换积分次序(Fourier 对此种交换不怀疑有什么问题),他便有
$$u = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} F(\alpha)\,d\alpha\int_0^{\infty} e^{-kq^2t}\cos qx\cos q\alpha\,dq.$$
Fourier 然后对奇函数 $F(x)$做了类似的事,从而最后得到

(24)
$$u = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\,d\alpha\int_0^{\infty} e^{-kq^2t}\cos q(x-\alpha)\,dq.$$
这样,解便被表示为封闭的形式了. 今对 $t=0$, u 就是 $F(x)$,它可以是任何给定的函数,所以 Fourier 断言,对任意的函数 $F(x)$,

(25)
$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\,d\alpha\int_0^{\infty}\cos q(x-\alpha)\,dq,$$
这便是任意函数的 Fourier 重积分表示的一种形式. Fourier 在他的书里指出,如何用这个积分解许多类型的微分方程. 一个用法是根据这样的事实,即如果用任何方法得到了(24),则(25)就表示 u 满足 $t=0$ 时的初始条件. 另一个用法更为明白,如果我们用Euler关系式 $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ 把 Fourier 积分写成指数形式. 则(25)变成
$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iqx}\,dq\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)e^{-iq\alpha}\,d\alpha.$$
这个形式表明,$F(x)$可以分解为无穷多个具有连续变动频率 $q/2\pi$ 和振幅为$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)e^{-iq\alpha}\,d\alpha$ 的调和分量,而通常的 Fourier 级数则是把给定函数分解成无穷多个但为离散的调和分量的集合.

Cauchy 关于 Fourier 积分的导出有点相似,载有此事的论文《波的传播理论》获得了巴黎科学院 1816 年的奖金①. 此文是对流体表面上波动的第一次大规模的研究,这是由 Laplace 在 1778 年

① *Mém. divers savans*, 1,1827, 3 ～ 312 = *Œuvres*, (1),1,5～318;也可见 Cauchy, *Nouv. Bull. de la Soc. Phil.*, 1817, 121 ～ 124 = *Œuvres*, (2),2,223～227.

开辟的课题. 虽然 Cauchy 建立了一般的流体动力学方程,但他差不多限于研究特殊情形. 特别是他考虑方程

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 q}{\partial y^2}=0,$$

其中 q 就是后来称为速度势的,而 x 与 y 是空间坐标. 他未加说明就写出了解(参看[22])

$$q=\int_0^{\infty}\cos mx\,e^{-ym}f(m)\,dm, \tag{26}$$

其中 $f(m)$ 至此还是任意的. 因为在曲面上 $y=0$, q 化为已给函数 $F(x)$,

$$F(x)=\int_0^{\infty}\cos mx\,f(m)\,dm. \tag{27}$$

然后 Cauchy 证明

$$f(m)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos mu\,F(u)\,du. \tag{28}$$

有了 $f(m)$ 的这个值后就有

$$F(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\cos mx\cos mu\,F(u)\,du\,dm. \tag{29}$$

这样 Cauchy 不但得到了 $F(x)$ 的 Fourier 二重积分表示,而且又有了 $f(m)$ 到 $F(x)$ 的 Fourier 变换及其逆变换. 给定了 $F(x)$, $f(m)$ 就由(28)确定,并能用于(26).

Cauchy 钻研他的得奖论文后不久,Poisson 就发表了关于水波的主要著作《关于波的理论的报告》①(Poisson 不能争奖,因为他是科学院的成员). 在这著作中他用与 Cauchy 大致相同的方式导出了 Fourier 积分.

4. 位势方程和 Green 定理

下一个重要的发展以位势方程为中心,虽然其主要结果,即

① *Mém. de l' Acad. des Sci., Paris*, (2),1,1816,71~186.

Green 定理,已应用于许多其他类型的微分方程.位势方程在18世纪关于引力的研究中已显露头角,在19世纪关于热传导的研究中又出现了,因为物体内的温度分布虽然逐点变化着,但当它不随时间变化,即处于稳定状态时,(1)中的 T 就与时间无关,从而热方程就化为位势方程.19世纪早期在重力吸引的计算中仍继续强调位势方程,但被静电学和静磁学的新的一类应用加强了.这里椭球体的吸引也是一个关键问题.

Poisson① 对用位势方程表述重力吸引的理论作了一个更正.Laplace(第22章第4节)曾假设位势方程

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0 \tag{30}$$

对产生重力吸引的物体的内部或外部任何点(x, y, z)都成立,其中 V 是 x, y 和 z 的函数.Poisson 指出,如果(x, y, z)在吸引体内部,则满足

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-4\pi\rho, \tag{31}$$

其中 ρ 是吸引体密度,也是 x, y, z 的一个函数.虽然(31)仍叫做 Poisson 方程,但像他自己所承认的,他对其正确性的证明即使以那个时代标准来看也是不严密的.

在这同一篇论文中,说到当电荷被允许自行分布在任何导体表面,则 V 在表面上的值必定是常数时,Poisson 提请注意在电的研究中可利用这函数 V.在别的论文中,他解决了许多求电荷在互相邻近的诸导体表面上分布的问题.他的基本原理是,在各个导体的任何一个的内部,静电合力必须为零.

在位势方程方面,尽管有 Laplace, Poisson, Gauss 以及别人的工作,但关于它的解的一般性质在19世纪20年代还几乎毫无所知,那时确信通积分必须包含两个任意函数,一个给出解在边界

① *Nouv. Bull. de la Soc. Philo.*, 3, 1813, 388～392.

上的值,另一个给出导数在边界上的值.然而在温度满足位势方程的稳态热传导情形,人们知道只要温度在表面上给定了,整个三维物体内部的温度或热分布就确定了.因此在位势方程的上述假定的通解中,任意函数之一必须按某种方式由某一个别的条件固定下来.

在这点上,通过自修而成功的英国数学家 George Green (1793—1841)企图用彻底的数学方式来论述静电磁学.1828 年 Green 出版了一本私人印刷的小册子《关于数学分析应用于电磁学理论的一篇论文》(*An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*).此文未受到重视,直到 William Thomson 爵士(Kelvin 勋爵,1824—1907)发现了它,认识到它的巨大价值,才把它发表于《数学杂志》①.Green 从 Poisson 的论文中学到许多东西,他也把位势函数的概念移用到电磁学.

他从(30)式开始,证明了下述定理:设 U 与 V 是 x, y, z 的任意两个连续函数,它们的导数在一任意物体的任何点上都不为无穷.其主要定理断言(我们将用 ΔV 表示(30)的左边,虽然 Green 没有用它)

$$\iiint U\Delta V dv+\iint U\frac{\partial V}{\partial n}d\sigma = \iiint V\Delta U dv+\iint V\frac{\partial U}{\partial n}d\sigma, \tag{32}$$

其中 n 是物体表面指向内部的法向,$d\sigma$ 是曲面元.定理(32)恰巧也曾由俄国数学家 Michel Ostrogradsky(1801—1861)证明过,他在 1828 年②把这定理呈给了彼得堡科学院.

然后 Green 指出 V 和它的每个一阶导数在物体内部连续这

---

① *Jour. für Math.*, 39,1850,73～89;44,1852,356～374;47,1854,161～221 = *Green's Mathematical Papers*, 1871,3～115.

② *Mém. Acad. Sci. St. Peters.*, (6),1,1831,39～53.

一要求可以用来代替 V 的导数所应满足的边界条件. 根据这一事实, Green 用 V 在边界(其函数假设已给定)上的值 $\overline{V}$ 和另一个具有如下性质的函数 U 来表示物体内部的 V:(a)U 在表面上必须为 0;(b)在内部一个固定的但未确定的点 P 上, U 像 $\frac{1}{r}$ 那样变为无穷, 其中 r 是 P 与任何另一点间的距离;(c)U 在内部必须满足位势方程(30). 如果 U 已知(它可能是比较容易找到的, 因为它满足比 V 较为简单的条件), 那么 V 在每一内点可以表示为

$$4\pi V = -\iint \overline{V}\,\frac{\partial U}{\partial n}\mathrm{d}\sigma,$$

其中积分展布在曲面上, 而 $\frac{\partial U}{\partial n}$ 是 U 沿垂直于曲面而指向物体内部方向上的导数. 不用说, P 的坐标包含在 $\frac{\partial U}{\partial n}$ 内, 而且是在 P 处的变量. 这个由 Green 引进的后来 Riemann 称之为 Green 函数的函数 U 已成为偏微分方程的一个基本概念. 与 V 一样, Green 用"位势函数"的术语称这个特殊函数 U, 他求得位势方程解的方法与用特殊函数的级数的方法相反, 称为奇异点方法. 遗憾的是, 函数 U 没有一般的表达式, 也没有求它的一般方法. 在这件事情上, Green 满足于对电荷所产生的电位的情形, 给出 U 的物理意义.

Green 应用他的定理和概念于电磁学问题. 1833 年他又着手研究变密度椭球体的引力位势问题①. 在这个工作中, Green 证明了, 当 V 在物体边界上给定时, 在整个物体上刚好有一个函数满足 $\Delta V = 0$, 没有奇点, 有给定的边界值. 为了作出他的证明, Green 假定了存在一个函数极小化积分

$$\iiint\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]\mathrm{d}v. \tag{33}$$

这是 Dirichlet 原理的第一次使用(参看第 27 章第 8 节).

① *Trans. Camb. Phil. Soc.*, 5_3, 1835, 395～430 = *Mathematical Papers*, 187～222.

Green 在 1835 年的这篇论文中,做了许多用 n 维代替三维的工作,又给出了我们现在叫做超球面函数的重要结果,它是 Laplace 球面调和函数的推广. 因为 Green 的工作在一个时期内没有出名,所以,其他一些人独立地做了这个工作中的某些部分.

在分析引入英国后,Green 是第一个沿着大陆上的工作线索前进的英国大数学家. 他的工作培育了数学物理学者的庞大的剑桥学派,其中包括 William Thomson 爵士,Gabriel Stokes 爵士,Rayleigh 勋爵和 Clerk Maxwell.

继 Green 成就之后的是 Gauss 1839 年①的主导性著作《与距离平方成反比而作用的吸引力和排斥力的普遍定理》. Gauss 严格地证明了 Poisson 的结果,即在作用体内部一点处成立 $\Delta V = -4\pi\rho$, 而 ρ 满足条件:在该点及周围一小区域内连续. 这个条件在作用体的表面上是不满足的. 在表面上$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$有跳跃.

到这时为止,在位势方程和 Poisson 方程方面的工作,都假定了解的存在性. Green 关于存在 Green 函数的证明完全基于物理的理由. 从存在性观点看,位势理论的基本问题是要证明存在一个位势函数 V(William Thomson 在大约 1850 年时称它为调和函数),它的值在一个区域的边界上是给定了的,在区域内满足 $\Delta V = 0$. 人们可以直接证实这件事,或者先证实 Green 函数 U 的存在性,然后再从它得到 V. 建立 Green 函数或 V 本身的存在性的问题称为 Dirichlet 问题或位势理论的第一边值问题,是这门学科中的最基本和最古老的存在性问题. 当 V 在边界上的法向导数已给定时,要找函数 V 使其在区域内部满足 $\Delta V = 0$ 的问题,采用莱比锡的教授 Carl G. Neumann(1832—1925)的名字叫 Neumann

① *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins*, Vol. 4, 1840 = *Werke*, 5, 197~242.

问题. 这个问题叫做位势理论的第二基本问题.

一条通向建立方程 $\Delta V=0$ 的解的存在性问题的路径,Green 已经采用过(请看[33]),但是 William Thomson 把它提到突出地位. 1847 年[①] Thomson 发表了一条定理或原理,这一原理在英国以它的名字命名,在大陆则叫做 Dirichlet **原理**,因为 Riemann 这样称呼它. 虽然 Thomson 是用较为普遍的形式叙述的,但原理的本质可以这样说:曲面 S 把区域分为内部区域 T 和外部区域 T',考虑在 T 和 T' 上分别有连续二阶导数的一切函数 U 的集合. 这些函数 U 处处连续,并且在 S 上取一连续函数 f 的值. 极小化 Dirichlet 积分

$$I=\iiint_T\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]dv \tag{34}$$

的函数 V 就是满足 $\Delta V=0$ 并且在边界 S 取值为 f 的一个函数. (34)和 ΔV 的联系在于:按变分学的意义,I 的一级变分是 ΔV,而对于极小化的 V,ΔV 必须是 0. 因为对于实的 U,I 不可能是负的,所以看来很清楚,极小化函数 V 一定存在,从而不难证明它是唯一的. 于是 Dirichlet 原理是探讨位势理论中 Dirichlet 问题的一条途径.

Riemann 在复变函数方面的工作给 Dirichlet 问题和原理本身以新的重要性. Riemann 在他的博士论文中关于 V 的存在性的"证明"用了二维情形的 Dirichlet 原理,但像他自己所承认的,这个证明是不严格的.

Weierstrass 在他的 1870 年的一篇文章中[②]对 Dirichlet 原理提出批评时指出,极小化函数 U 的先验存在性是不为正确推理所支持的. 对一切连续可微函数 U(它从内部区域到指定边界值

---

① *Jour. de Math.*, 12,1847,493～496 = *Cambridge and Dublin Math. Jour.*, 3,1848,84～87 = *Math. and Physical Papers*, 1,93～96.

② 第 27 章第 9 节.

上是连续地变动的),此积分有一个下界,那是对的.但是在连续的可微的函数类中是否存在一个函数 U_0 达到这下界却是未经证明的.

解位势方程的另一技术是利用复函数论.虽然 d'Alembert 在他 1752 年的著作(第 27 章第 2 节)中和 Euler 在一些特殊问题中已经用这技术解过位势方程,但直到 19 世纪中叶复函数论才活跃地应用于位势理论.函数论与位势理论的相依关系基于如下事实:如果 $u+iv$ 是 z 的一个解析函数,则 u 和 v 两者都满足 Laplace 方程.此外,如果 u 满足 Laplace 方程,则使 $u+iv$ 解析的共轭函数 v 必定存在(第 27 章第 8 节).

把方程 $\Delta u=0$ 用于研究流体流动时,函数 $u(x, y)$ 就是 Helmholtz 所称的速度势,而这时 $\partial u/\partial x$ 和 $\partial u/\partial y$ 就表示流体在任一点 (x, y) 的速度分量.在静电学的情形,u 是静电位而 $\partial u/\partial x$ 和 $\partial u/\partial y$ 是电力分量.在这两种情形下,曲线 $u=$ 常数是等位线,而正交于 $u=$ 常数的曲线 $v=$ 常数都是流线或趋势线(电力线).函数 $v(x, y)$ 叫流势函数.由于这个函数的物理意义,把它引进来显然是有用的.

在解位势方程时,使用复函数论的一个优点来自这样一个事实,即:如果 $F(z)=F(x+iy)$ 是解析函数,因而它的实部和虚部满足 $\Delta V=0$, 那么经过变换

$$\xi=f(x, y), \eta=g(x, y), \tag{35}$$

其中

$$\zeta=\xi+i\eta,$$

把 x 与 y 变换到 ξ 与 η,就产生另一个解析函数 $G(\zeta)=G(\xi+i\eta)$,它的实部和虚部也满足 $\Delta V(\xi, \eta)=0$. 现在如果原来的位势问题 $\Delta V=0$ 必须在某区域 D 中求解,那么经适当选择变换,变换后的方程 $\Delta V=0$ 必须在区域 D' 中求解,而 D' 可能简单得多.这里,利用保角变换,如像 Schwarz-Christoffel 变换,是极为有益的.

我们不深入讨论复函数论在位势理论中的用法了,因为它的

用法的细节远远超出解偏微分方程的任何基本方法论. 然而,值得再次注意的是,许多数学家拒绝使用复函数,因为他们仍对复数感到不安. 在剑桥大学,甚至在 1850 年,还用繁笨的手段以避免牵涉到复函数. Horace Lamb 的《流体运动的数学理论教程》(*Treatise on the Mathematical Theory of the Motion of Fluids*),出版于 1879 年,是第一本在剑桥承认接受函数论的书. 这本书仍然是一本经典著作(今称为《流体动力学》(*Hydrodynamics*)).

5. 曲 线 坐 标

Green 引入了许多主要的概念,其意义远远延伸到位势方程以外. 最先关注热方程的数学家兼工程师 Gabriel Lamé(1795—1870)引入了另一个主要的技巧,即使用曲线坐标系,它也可以用于许多类型的方程. Lamé 于 1833 年①指出,热方程仅对那些表面垂直于坐标平面 $x=$常数,$y=$常数,$z=$常数的导体是解出来了. Lamé 的想法是引入新的坐标系和相应的坐标面. 在非常有限的程度上说,这事已由 Euler 和 Laplace 做过了,他们两人使用了球坐标 ρ, θ, ϕ,在这情况下,坐标面 $\rho=$ 常数、$\theta=$ 常数、$\phi=$ 常数分别是球面、平面、锥面. 知道了从直角坐标变换到球坐标的方程,人们就能像 Euler 与 Laplace 所做的那样,把位势从直角坐标变换到球坐标.

新坐标系和坐标曲面的价值是双重的. 第一,在直角坐标系中,一个偏微分方程可能不能分离成这坐标系中的常微分方程,但在另一坐标系中可能是可分离的. 第二,物理问题可能需要一个,比如说,椭球上的边界条件,这样的边界在有一族以椭球面组成坐标面的坐标系中可以简单地表示出来,而在直角坐标系中必须用相当复杂的方程. 此外,在所采用的适当的坐标系中经变量分离

---

① *Jour. de l' Ecole Poly.*, 14, 1833, 194～251.

后，这个边界条件变成恰好可应用于所得常微分方程中的一个方程.

为了在新坐标系中解热方程的特殊目的，Lamé 引进了几个新的坐标系①. 他的主要坐标系是三族曲面，由下列方程给出：

$$\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\lambda^2-b^2}+\frac{z^2}{\lambda^2-c^2}-1=0,$$

$$\frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-b^2}+\frac{z^2}{\mu^2-c^2}-1=0,$$

$$\frac{x^2}{\nu^2}+\frac{y^2}{\nu^2-b^2}+\frac{z^2}{\nu^2-c^2}-1=0,$$

其中 $\lambda^2>c^2>\mu^2>b^2>\nu^2$. 这三族曲面是椭球面，单叶双曲面和双叶双曲面，它们全都具有相同的焦点. 一族中的任一曲面垂直地交割所有其他两族中的曲面，而实际上是在曲率线上交割它们的(第 23 章第 7 节). 因此空间中任何点有坐标$(\lambda,\ \mu,\ \nu)$，即每族中经过该点的曲面的 λ, μ 和 ν. 这个新坐标系叫做椭球面的，虽然 Lamé 曾称它为椭圆的(这一术语现已用于另一种坐标系了).

Lamé 把稳态情形(即温度不依赖于时间)的热方程，即位势方程，变换到这些坐标系，并指出他能用变量分离法把偏微分方程划归为三个常微分方程. 当然这些方程必须在适当的边界条件下求解. Lamé 在 1839 年②的一篇论文中进一步研究了在三轴椭球体中稳态的温度分布，并对他 1833 年论文处理的问题给出了一个完全解. 在这 1839 年的论文中他又引进了另一个曲线坐标系，现在称为球锥系，其中坐标曲面是一族球面和两族锥面. Lamé 还用这坐标系解过热传导问题. Lamé 用椭球坐标写了许多关于热传导的论文，连同 1839 年的第二篇论文包含在同一卷《数学杂志》内，在其中他处理了椭球体的一些特殊情形③.

---

① *Annales de Chimie et Physique*, (2),53,1833,190～204.

② *Jour. de Math.*, 4,1839,126～163.

③ *Jour. de Math.*, 4,1839,351～385.

互相正交的曲面族的课题,在偏微分方程的求解中有如此明显的重要性,以至对它本身或它内部的问题的研究已成为一个主题.在 1834 年的一篇论文[①]中 Lamé 考虑了任何三族互相正交的曲面的普遍性质,给出了一个沿用至今的技术:在任何正交坐标系中表示偏微分方程的程序.

(Heinrich) Eduard Heine(1821—1881)沿着 Lamé 的思路前进.Heine 在他 1842 年的博士学位论文中[②],不仅确定了旋转椭球体内部的(稳态温度)位势(当位势在表面的值已给出时),而且还确定了这种椭球体外部的和两同焦旋转椭球面之间的壳体的位势.

Lamé 对他和别人用相互正交的坐标系所完成的事有如此深刻的印象,以至认为所有的偏微分方程都可能通过寻找适当的坐标系求解.后来他认识到这是一个错误.1859 年他出版了一本论整个课题的书——《曲线坐标讲义》(*Leçons sur les coordonnées curvilignes*).

虽然把三族互相正交的曲面用作坐标曲面不能解决所有的偏微分方程,但确实开辟了一个新技术,在许多问题中能表现其优越性.曲线坐标的使用已移植到其他偏微分方程.例如,Emile-Léonard Mathieu(1835—1900)在 1868 年的一篇论文中[③],处理一个椭圆薄膜振动问题,其中涉及到波动方程,这里他引入了椭圆柱坐标,相应于这些坐标的函数,今称为 Mathieu 函数(第 29 章第 2 节).在同一年 Heinrich Weber(1842—1913)研究方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+k^2u=0$ 时[④],对由完整椭圆所围成的区域解出了它,同时也对由两个同焦椭圆弧和与椭圆弧同焦的两个双曲弧围成的区域解出

① *Jour. de l' Ecole Poly.*, 14,1834,191～288.

② *Jour. für Math.*, 26,1843,185～216.

③ *Jour. de Math.*, (2),13,1868,137～203.

④ *Math. Ann.*, 1,1869,1～36.

了它. 在椭圆和双曲线变成同焦抛物线的特殊情形也被考虑过,这里 Weber 引进了在这坐标系中便于展开的函数,今称为 Weber 函数或抛物柱函数. Mathieu 在他的《数学物理教程》(*Cours de physique mathématique*, 1873)中,讨论了包含椭球体的新问题,并引入了其他更新的函数.

Lamé 所开创的想法,即用曲线坐标的想法,还只是描述了这一工作的开端. 许多其他的坐标系已经导入,用变量分离法引出的常微分方程,求解时得到的相应的各种特殊函数也已研究过了①. 特殊函数的这个理论的大部分,是由物理学者在具体问题中,当他们需要这些函数及其性质时所创立的(亦可见第 29 章).

6. 波动方程和退化波动方程

偏微分方程的最重要的类型也许是波动方程了. 在三维空间中,其基本形式是

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{36}$$

就我们所知,这方程在 18 世纪就已经引入了,并且也已用球坐标表示出来. 19 世纪时波动方程的新用途被发现了,特别是在萌芽时期的弹性领域. 各种形状的固体在不同的初始条件和边界条件下的振动以及波在弹性体中的传播产生一大堆问题. 进一步研究声和光的传播引起成百个附加问题.

在变量可分离的场合,解(36)的技巧与 Fourier 解热方程和 Lamé 用某一曲线坐标系表示位势方程后所做的没有差别. Mathieu 用曲线坐标经变量分离而求解波动方程是成百篇论文中的典型.

① 见 William E. Byerly 的 *An Elementary Treatise on Fourier Series*, Dover (reprint), 1959, 与 E. W. Hobson, *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*, Chelsea (reprint), 1955.

处理波动方程的另一类完全不同的重要结果是把方程作为整体对待而得到的. 第一个这样的主要结果是论述初值问题的,这要追溯到 Poisson,他在 1808 到 1819 年期间研究过这个方程. 他的主要成就①是一个关于波 $u(x, y, z, t)$ 传播的公式,其初始状态由初始条件

$$u(x, y, z, 0) = \phi_0(x, y, z), \quad u_t(x, y, z, 0) = \phi_1(x, y, z) \tag{37}$$

描述,而波 u 满足偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{38}$$

其中 a 是常数. 其解 u 由下式给出:

$$\begin{aligned}(39)\ u(x, y, z, t) &= \frac{1}{4\pi a}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\phi_1\,(x + at\sin\phi\cos\theta,\ y + at\sin\phi\sin\theta,\\ &\qquad z + at\cos\phi)at\sin\phi\,d\theta d\phi\\ &\quad + \frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\phi_0\,(x + at\sin\phi\cos\theta,\ y + at\sin\phi\sin\theta,\\ &\qquad z + at\cos\phi)at\sin\phi\,d\theta d\phi,\end{aligned}$$

其中 θ 与 ϕ 是普通的球坐标. 积分区域是以具有坐标 x, y, z 的点 P 为中心,以 at 为半径的球 S_{at} 的表面.

Poisson 的结果意味着什么,为了得到这方面的某些启示,让我们来考虑一个物理例子. 假如初始扰动是由边界为 S 的物体 V(图 28.2)发出,使得 ϕ_0 与 ϕ_1 定义在 V 上并在 V 外为 0. 我们说这初始扰动在 V 上被局部化了. 从物理上看是一个波从 V 发出并向空间扩展出去. Poisson 的公式告诉我们在 V 外任一点 $P(x, y, z)$处发生些什么事情. 令 d 与 D 表示 P 到 V 上的点的最小与最大距离. 当 $t < \frac{d}{a}$ 时,(39)中的积分为零,因为积分区域是中心在

① *Mém. de l' Acad. des Sci., Paris*, (2),3,1818,121～176.

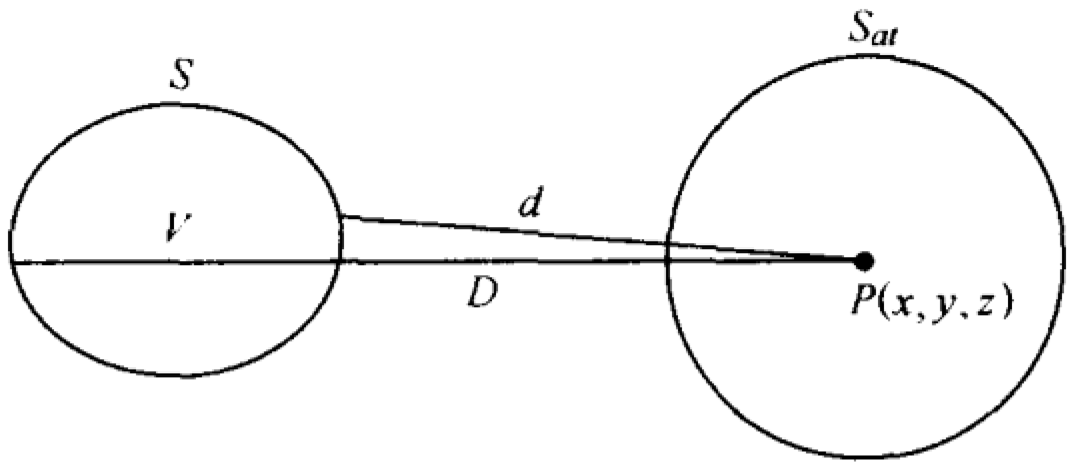


图 28.2

P、半径为 at 的球 S_{at} 的表面. 因为 ϕ_0 与 ϕ_1 在 S_{at} 上是 0,于是函数 u 在 P 处是 0. 这意味着从 S 扩展出来的波还没有达到 P. 在 $t=\frac{d}{a}$ 时,球 S_{at} 刚刚接触到 S,因此从 S 发出的波的波前到达 P. 当 t 在 $t=\frac{d}{a}$ 和 $t=\frac{D}{a}$ 之间时,球 S_{at} 交割 V,所以 $u(P,t)\neq 0$. 最后对 $t>D/a$,球 S_{at} 将不与 S 相交(整个区域 V 属于 S_{at} 的内部),即是说,初始扰动已经通过了 P. 所以又有 $u(P,t)=0$. 时刻 $t=\frac{D}{a}$ 相应于波的尾缘通过 P. 在任何给定的时刻 t,波的前缘呈曲面形状,把扰动已到达的点和尚未到达的点分开. 这个前缘是中心在 S、半径为 at 的一族球面的包络. 在时刻 t,波的后缘是一个曲面,把还存在有扰动的点与扰动已经过去的点分开. 于是我们看到,在空间局部化了的扰动在每一点 P 引起的效果仅仅持续有限时间. 此外这波(扰动)还有前缘和后缘. 这整个现象叫做 Huygens 原理.

解波动方程初值问题的一个完全不同的方法是 Riemann 在研究有限振幅声波传播的过程中创立的①. 他考虑可写为如下形状的二阶线性微分方程:

$$(40)\qquad L(u)=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=0,$$

其中 D,E,F 是 x 和 y 的二阶可微的连续函数. 问题是在知道了

① *Abh. der Ges. der Wiss. zu Gött.*, 8, 1858/1859, 43~65 = *Werke*, 156~178.

沿曲线 Γ 的 u 和 $\partial u/\partial n$(意即知道 $\partial u/\partial x$ 和 $\partial u/\partial y$)时，去求出在任意点 P 处的 u(图 28.3)，他的方法依赖于找一个函数 v(叫 Riemann 函数或特征函数)①，使其满足现今所称的共轭方程

$$(41)\qquad M(v)=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-\frac{\partial(Dv)}{\partial x}-\frac{\partial(Ev)}{\partial y}+Fv=0$$

和其他一些我们即将详细说明的条件.

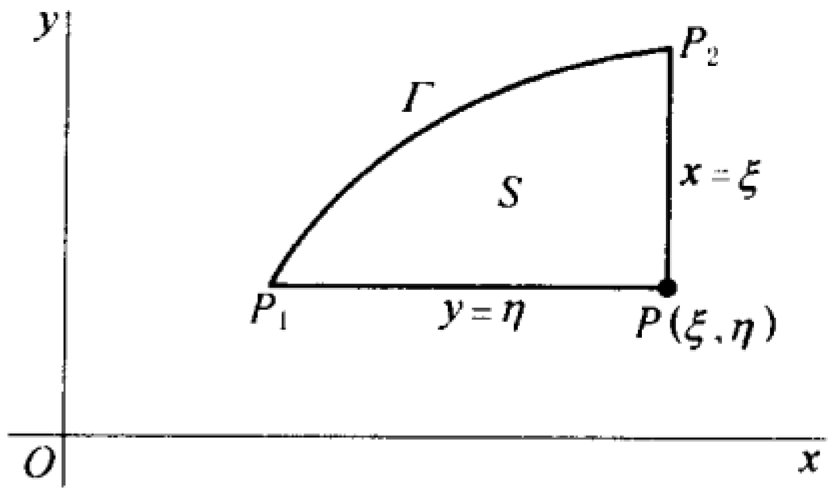


图 28.3

Riemann 引入通过 P 的特征(他没有用这个名词)，$x=\xi$ 和 $y=\eta$ 的线段 PP_1 和 PP_2. 现在把广义 Green 定理(二维情形)应用于微分表示式 $L(u)$. 为了简明地表示这定理，我们引进

$$X=\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial v}{\partial y}\right)+Duv,$$

$$Y=\frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}\right)+Euv.$$

于是 Green 定理说

$$(42)\qquad \int_S[vL(u)-uM(v)]\mathrm{d}S=\int_S\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\mathrm{d}S$$

$$=\int_C\{X\cos(n,x)+Y\cos(n,y)\}\mathrm{d}s,$$

其中 S 是图中的区域，C 是 S 的整个边界，$\cos(n,x)$ 是 C 的法线方向和 x 轴间夹角的余弦.

除了满足(41)，Riemann 对 v 还要求

① v 与基本解或 Green 函数不一样.

$$(43)\quad \begin{aligned} &(a)\ v = 1 \quad 在\ P\ 处, \\ &(b)\ \frac{\partial v}{\partial y} - Dv = 0 \quad 在\ x = \xi\ 上, \\ &(c)\ \frac{\partial u}{\partial x} - Ev = 0 \quad 在\ y = \eta\ 上^{①}. \end{aligned}$$

使用条件 $M(v) = 0$ 与条件(43),并算出 C 上的曲线积分,Riemann 得到

$$(44)\quad u(\xi, \eta) = \int_{\Gamma} \{X\cos(n, x) + Y\cos(n, y)\} ds + \frac{1}{2}\{(uv)_{P_1} + (uv)_{P_2}\}.$$

这样,在任意点 P 处 u 的值就用 u, $\partial u/\partial n$, v 和$\partial v/\partial n$ 在 Γ 上的值及 u 和 v 在 P_1 与 P_2 处的值给出来了.

现在 u 在 P_1 与 P_2 已给出.函数 v 本身必须从求解 $M(v) = 0$ 得出并满足条件(43). Riemann 方法取得的成就在于:把原来关于 u 的初值问题变成关于 v 的另一类初值问题.而第二个问题通常较容易求解.在 Riemann 的物理问题中,找出 v 来特别容易.然而这样的 v 的存在性一般说来不是由 Riemann 证明的.

刚才所述的 Riemann 方法仅对以二元波动方程(双曲方程)作为例子的那类方程有用,而不能直接推广.把这个方法推广到多于两个独立变量时,遇到了 Riemann 函数在积分区域边界上变为奇异从而使积分发散的困难.这方法已经被推广,但以增加复杂性为代价.

用其他方法解波动方程的进展是与所谓稳态问题密切联系的,它导致简化的波动方程.波动方程就其形式本身来说,是包含时间变量的.在许多物理问题里,如果人们感兴趣的是简单谐波,就假设 $u = w(x, y, z)e^{ikt}$,把它代入波动方程就得到

① 对二维问题,v 是四个变量 ξ, η, x 和 y 的函数.作为 x, y 的函数,它满足方程 $M(v) = 0$.

(45) $$\Delta w+k^2w=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+k^2w=0.$$

这就是退化波动方程或 Helmholtz 方程. 方程 $\Delta w+k^2w=0$ 表示所有调和的、声音的、弹性的、电磁学的波. 正当较老的作者满足于寻找特殊积分的时候, Hermann von Helmholtz(1821—1894)在他论一端开放的管道内(风琴管)空气振动的著作里,给出了关于这个方程的解的第一个普遍的研究①. 他关注传音的问题,其中 w 是一个作谐振动的气体的速度势, k 是由空气弹性和振动频率确定的常数, λ 是波长,等于 $2\pi/k$. 应用 Green 定理,他证明了: $\Delta w+k^2w=0$ 的任一个在给定区域内连续的解可以表示为区域表面上激发点的单层和双层效应. 把 $e^{-ikr}/4\pi r$ 作为 Green 定理中的一个函数,他得到

(46) $$w(P)=-\frac{1}{4\pi}\iint\frac{e^{-ikr}}{r}\frac{\partial w}{\partial n}dS+\frac{1}{4\pi}\iint w\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\right)dS,$$

其中 r 表示 P 到边界上变动点的距离. 这样,在求解区域内任一点 P 处的 w 就由 w 与 $\partial w/\partial n$ 在边界 S 上的值给出.

19 世纪伟大的德国数学物理学者之一, Gustav R. Kirchhoff (1824—1887)使用 Helmholtz 的工作求得了波动方程初值问题的另一个解. 假定 $\Delta w+k^2w=0$ 是得自

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\Delta u,$$

其中已令 $u=we^{i\sigma t}$ 以使 $k=\sigma/c$. 于是(46)可写为

(47) $$u(P,t)=-\frac{1}{4\pi}\iint\frac{e^{i\sigma[t-(r/c)]}}{r}\frac{\partial u}{\partial n}dS+\frac{1}{4\pi}\iint u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{i\sigma[t-(r/c)]}}{r}\right)dS.$$

这个公式被 Kirchhoff 推广了. 如果令 $\phi(t)$ 是 u 在时刻 τ 时边界上

① *Jour. für Math.*, 57, 1860, 1～72 = *Wissenschaftliche Abhandlungen*, 1, 303～382.

任一点(x, y, z)处的值,并令$f(\tau)$是$\frac{\partial u}{\partial n}$相应的值,则 Kirchhoff 证明了[①]

$$u(P, t) = -\frac{1}{4\pi}\iint \frac{f[t-(r/c)]}{r}\mathrm{d}S + \frac{1}{4\pi}\iint \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\phi[t-(r/c)]}{r}\right)\mathrm{d}S, \tag{48}$$

其中假定在最后一项中关于n的微分仅在r明显出现于分子分母两者时才应用于r. 这样,在P处的u就用u与$\frac{\partial u}{\partial n}$在较早时刻、在围绕$P$点的闭曲面上的值表出. 这结果叫作声学的 Huygrens 原理,是 Poisson 公式的推广.

我们已经注意到 Riemann 用了稍较广义的 Green 定理. 用到共轭微分方程的 Green 定理的完全推广也称为 Green 定理,来源于 Du Bois-Reymond(1831—1889)的一篇论文[②]和 Darboux 的书《曲面的一般理论》(*Théorie générale des surfaces*)[③];两者都引用了 Riemann 1858/1859 年的论文. 如果给定的方程是

$$L(u) = A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0,$$

其中系数都是x与y的函数. 在u、v与其一阶、二阶导数都连续的假定下,在x-y平面的任意区域R上积分乘积$vL(u)$. 于是由分部积分就得到广义的 Green 定理:

$$\iint uM(v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint vL(u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int(Q\mathrm{d}y - P\mathrm{d}x),$$

其中重积分展布于R的内部,单积分展布于R的边界上,并且

$$M(v) = \frac{\partial^2(Av)}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2(Bv)}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2(Cv)}{\partial y^2} - \frac{\partial(Dv)}{\partial x} - \frac{\partial(Ev)}{\partial y} + Fu,$$

① *Sitzungsber. Akad. Wiss. zu Berlin*, 1882,641～669=*Ges. Abh.*, 2, 22 ff.

② *Jour. für Math.*, 104,1889,241～301.

③ Vol. 2, Book Ⅳ, Chap. 4,2nd ed., 1915.

$$P = B\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + C\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(E - \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial C}{\partial y}\right)uv,$$

$$Q = A\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right) + B\left(v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \left(D - \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y}\right)uv.$$

$M(v)$是$L(u)$的共轭表示式，$M(v)=0$是共轭微分方程. 反之，$L(u)$是$M(v)$的共轭.

Green定理的重要性在于它能用于求得某些偏微分方程的解. 例如,因为椭圆型方程总能够写成

$$L(u) = \Delta u + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0$$

的形式,于是

$$M(v) = \Delta v - \frac{\partial(av)}{\partial x} - \frac{\partial(bv)}{\partial y} + cv = 0.$$

令v是共轭方程的一个解,它在任意点(ξ, η)像对数那样变成无穷;就是说,它的性态相同于

$$v = U\log r + V,$$

其中r是从(ξ, η)到(x, y)的距离;U与V在所考虑的区域R内是连续的;并且U是标准化了的,因而$U(\xi, \eta)=1$. 现在把(ξ, η)包围在一个圆内,把它从积分区域中剔出来. 于是,当此圆收缩到(ξ, η)时,由广义Green定理给出

$$(49)\quad 2\pi u(\xi, \eta) = -\iint vL(u)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int\left[v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n} + (a\cos(n, x) + b\cos(n, y))uv\right]\mathrm{d}s,$$

其中的n如果指向区域外部就是正的,单积分按反时针方向展布在边界上. 因为u满足$L(u)=0$; 如果我们知道v,并且在边界上

u 与$\partial u/\partial n$已给出(两者都不是任意的),那么我们就把 u 表示成了单积分. 函数 v 叫做 Green 函数. 然而常常把 v 在 R 的边界上为 0 的条件附加到 Green 函数的定义中去. Green 定理的这个用法已发展到各种特殊情形和各种推广.

7. 偏微分方程组

18 世纪时,流体运动的微分方程显现为第一个重要的偏微分方程组. 19 世纪时创建了三个更为基本的方程组:粘性介质的流体动力方程、弹性介质方程和电磁理论方程.

当有粘性出现时(实际上总是这样),流体运动方程的获得经历了曲折的途径. Euler 已经给出了无粘性流体运动的方程. 从 Lagrange 所处的时代起,就已经认识到有速度位势存在和无速度位势存在的流体运动之间的本质差别. 经与弹性理论的形式类比和分子受排斥力激活的假设的启发,多科工艺学校和交通工程学校的力学教授 Claude L. M. H. Navier(1785—1836)在 1821 年得到了基本方程①. 像今天被确认的那样,Navier-Stokes 方程是

$$
\begin{aligned}
\rho \frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t} &= \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{3}\mu \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \Delta u, \\
\rho \frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t} &= \rho Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{3}\mu \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \Delta v, \qquad (50) \\
\rho \frac{\mathrm{D}w}{\mathrm{D}t} &= \rho Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{3}\mu \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \Delta w, \\
\theta &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},
\end{aligned}
$$

其中 Δ 有通常意义;ρ 是流体的密度;p 是压力;u, v, w 是流体在时刻 t 时,在任一点(x, y, z)处的速度分量;X, Y, Z 是一个外力的分量;常数 μ 依赖于流体的性质,叫做粘性系数;导数 $\mathrm{D}/\mathrm{D}t$ 具

① *Mém de l' Acad. des Sci., Paris*, (2),1827,375～394.

有第 22 章第 8 节解释的意义. 对于不可压缩的流体, $\theta = 0$.

这些方程也被 Poisson 在 1829 年①得到. 之后, 又被剑桥大学数学教授 George Gabriel Stokes(1819—1903)在他的论文《关于运动流体内部摩擦的理论》②中根据连续介质力学重新导出. Stokes 力图说明在所有已知液体中的摩擦作用, 它把动能转化为热而引起运动衰减. 液体由于其粘性而附着于固体的表面, 因而对它们作用着切向力.

弹性的学科是由 Galileo, Hooke, Mariotte 奠基的, 而由 Bernoulli 家族和 Euler 培育的. 但这些人只处理了一些特殊问题. 为了解决这些问题, 他们关于梁、杆和板在应力、压力或荷载下是怎样变动的提出了专门的假设. 严格意义上的理论是 19 世纪创立的. 从 19 世纪初叶起, 许多伟大人物持续地致力于获得主宰弹性介质(包括空气)的行为的方程. 这些人主要是工程师和物理学家. 在他们之中 Cauchy 和 Poisson 是大数学家, 虽然 Cauchy 按其所受的训练说来是个工程师.

弹性问题包括: 物体在应力下的行为, 其中要考虑它们将取什么平衡位置; 物体在一个初始扰动或一个连续作用力驱动时的振动; 以及在空气或固体的情形下, 波通过它们的传播. 在 19 世纪, 大约在 1820 年, 出现了由物理学家 Thomas Young(1773—1829)和工程师 Augustin-Jean Fresnel(1788—1827)开创的光的波动理论, 于是对弹性学的兴趣就增浓了. 光被看作是波在以太中的运动, 而以太被认为是一种弹性介质. 因此光通过以太的传播就成为一个基本问题. 19 世纪初期, 对弹性学引起强烈兴趣的另一个刺激是 Ernst F. F. Chladni(1756—1827)关于玻璃和金属的振动的实验(1787), 他指出了波节线. 这些应与声音有关, 例如与振动鼓

① *Jour. de l' Ecole Poly.*, 13, 1831, 1～74.

② *Trans. Camb. Phil. Soc.*, 8, 1849, 287～319 = *Math. and Phys. Papers*, 1, 75～129.

面发出的声音有关.

求得弹性学基本方程的工作是长期的和充满陷阱的,因为对于物质内部或分子结构知道得很少,所以把握任何物理原理都是困难的.对于固体、空气、以太所作的假设随着作者的不同而不同,并且是互相争执着的.对于以太的情形,人们推测它是穿过固体的,因为光线通过某些固体,并被另一些固体所吸收,而以太分子同固体分子的关系也提出了极大的困难.我们不打算追究弹性体的物理理论,即使今天我们的理解也是不完全的.

Navier① 是第一个(1821)研究弹性体平衡和振动的普遍方程的人.他把材料假设为各向同性,因而各方程只包含表示物体性质的单独一个常数.到 1822 年,经 Fresnel 工作的刺激,Cauchy 开辟了另一条通向弹性理论的途径②. Cauchy 的方程包含表示物体材料的两个常数,对各向同性的物体来说,其方程是

$$
\begin{aligned}
&(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x}+\mu\Delta u=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\\
&(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y}+\mu\Delta v=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},\\
&(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial z}+\mu\Delta w=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},\\
&\theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}.
\end{aligned}
\tag{51}
$$

这里 u, v, w 是位移分量,θ 叫做膨胀系数,λ 和 μ 是物体或介质的常数.对一般的非各向同性介质来说,方程是十分复杂的,而把它们普遍地写出来可能是乏味的.这些方程是由 Cauchy 给出的③.

19 世纪对科学和技术带有巨大冲击的最壮观的胜利是

① *Mém. de l' Acad. des Sci., Paris*, (2),7,1827,375～394.

② *Exercices de math.*, 1828 = *Œuvres*, (2),8,195～226.

③ *Exercices de math.*, 1828 = *Œuvres*, (2),8,253～277.

Maxwell在1864年关于电磁学规律的导出①. Maxwell利用无数先辈们特别是Faraday关于电和磁的研究引入了位移电流的概念——无线电波是位移电流的一种形式——并且用这个概念确切地表述了电磁波的传播. 他的方程有四个,最方便的是用后来为Oliver Heaviside采用的向量形式叙述,包含电场强度 $\boldsymbol{E}$,磁场强度 $\boldsymbol{H}$,介电系数 ξ,介质的磁通率 μ,和电荷密度 ρ. 这些方程是

$$\text{curl}\,\boldsymbol{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial(\varepsilon\boldsymbol{E})}{\partial t},\ \text{curl}\,\boldsymbol{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial(\mu\boldsymbol{H})}{\partial t}, \tag{52}$$

$$\text{div}\,\varepsilon\boldsymbol{E}=\rho,\ \text{div}\,\mu\boldsymbol{H}=0\text{②}. \tag{53}$$

前两个方程是主要的方程,等于六个标量(非向量)的偏微分方程,位移电流是 $\partial(\varepsilon\boldsymbol{E})/\partial t$.

正是对这些方程的研究,使Maxwell预言电磁波以光速通过空间. 基于两速度相同,他勇敢地断言光是电磁现象. 这是一个从他那时代起已被详尽地证实了的预言.

大家知道,没有解任何上述方程组的普遍方法. 然而,19世纪的人们渐渐认识到在偏微分方程的情形下,不管是单个方程还是方程组,通解几乎不像初始条件和边界条件已给定的特殊问题的解有用,在这种情形下实验工作也可能帮助作出有用的简化假定. Fourier, Cauchy, Riemann的著作促进了这事的实现. 关于使这些方程组特殊化的许多初值和边值问题的求解工作是大量的,在这世纪中几乎所有的数学家都研究过这类问题.

8. 存在性定理

当18和19世纪的数学家们创立了大量类型的微分方程时,他们就发现解出很多这些方程的方法是不合用的. 在多项式方程

---

① *Phil. Trans.*, 155, 1865, 459～512 = *Scientific Papers*, 1, 526～597.

② 关于curl和div的意义见第32章第5节.

的情形,解四次以上方程的努力失败后,Gauss 转而去证明根的存在性(第 25 章第 2 节). 和这种情况有点相像,在微分方程的工作中,若求出了显解,则这一事实本身就证得了存在性;而求显解的失败就使数学家转而去证明解的存在性. 这样的证明即使并不显示出一个解或把解表为有用的形式,但仍满足多种目的. 几乎在所有的情形下,微分方程都是物理问题的数学描述. 因为没有什么东西可以有效地保证数学方程可以求解,所以解的存在性证明至少会保证解的寻求不是作无谓的尝试. 存在性的证明还会回答这样的问题:关于给定的物理情况,我们必须知道些什么,就是说,什么初始条件和边界条件保证有一个解,并且最好是保证有唯一的解. 另外有些目标,在存在性定理工作开始之初可能没有想像到,现在立即被认识到了. 解是否随着初始条件连续地变动? 或者当初始条件或边界条件稍稍变化时是否有完全新的现象产生? 例如,由行星的一个初始速度值得到的抛物轨道,作为初始速度稍微变化的结果,可以变成椭圆轨道. 轨道上这样的差异在物理上是最有意义的. 更进一步,解问题的某些方法论,如像 Dirichlet 原理或 Green 原理的运用,都预先假定了一个特解的存在. 这些特解的存在性并没有建立起来.

在我们给出关于存在性定理的工作的某些简短叙述之前,先说明偏微分方程的一种分类可能是有帮助的,这种分类实际上是在这世纪相当晚的时候才作出的. 虽然 Laplace 和 Poisson 已用把这些方程划归为正规或标准形式的办法对分类作了某些努力,但 Du Bois-Reymond 引入的分类现在已成为标准的了. 1839 年①他用特征线方法(第 22 章第 7 节)把最一般的齐次二阶线性方程

$$R\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+S\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+T\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+P\frac{\partial u}{\partial x}+Q\frac{\partial u}{\partial y}+Zu=0 \tag{54}$$

① *Jour. für Math.*, 104, 1889, 241~301.

进行了分类,方程中的系数都是 x 和 y 的函数,这些系数和它们的一阶和二阶导数都是连续的. 特征曲线到 x-y 平面的投影(这些投影也叫特征)满足

$$T\mathrm{d}x^2 - S\mathrm{d}x\mathrm{d}y + R\mathrm{d}y^2 = 0.$$

特征为虚值、相异实值或相同实值,取决于

$$TR - S^2 > 0,\ TR - S^2 < 0,\ TR - S^2 = 0.$$

Du Bois-Reymond 分别叫这些情形为椭圆的、双曲的和抛物的. 然后他指出,引入新的独立实变量

$$\xi = \phi(x,\ y),\ \eta = \psi(x,\ y)$$

之后,上述方程总可以分别变换到下面三种正规形式之一:

$$\text{(a)}\ R'\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right) + P'\frac{\partial u}{\partial\xi} + Q'\frac{\partial u}{\partial\eta} + Zu = 0,$$

$$\text{(b)}\ S'\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + P'\frac{\partial u}{\partial\xi} + Q'\frac{\partial u}{\partial\eta} + Zu = 0,$$

$$\text{(c)}\ R'\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + P'\frac{\partial u}{\partial\xi} + Q'\frac{\partial u}{\partial\eta} + Zu = 0.$$

曲线族 $\phi(x,\ y) =$ 常数和 $\psi(x,\ y) =$ 常数是两族特征曲线的方程.

可附加的补充条件对三类方程是不同的. 在椭圆型的情形(a),人们考虑 x-y 平面的一个有界区域并给定 u 在边界上的值(或一个等价的条件),而要求 u 在区域内的值. 对双曲型微分方程(b)的初值问题,人们必须在某初始曲线上给定 u 与$\partial u/\partial n$. 还可以有边界条件. 对于抛物型情形(c),虽然今天知道可以给(c)加上一个初始条件和边界条件,但那时适当的初始条件却还未指明. 偏微分方程的这个分类法已推广到多变量方程,高阶方程和方程组. 虽然分类和补充条件在这世纪的早期是不知道的,但数学家们渐渐地知道了这些差别,并且,这些差别已出现在他们能够证明的定理中.

关于存在性定理的工作成为 Cauchy 的主要活动,他强调说,

在求显解无效的场合常常可以确证存在性. 在一系列论文中①Cauchy 注意到任何阶数大于一的偏微分方程都可以划归为偏微分方程组,他讨论了方程组的解的存在性. 他称他的方法为**极限的计算**(Calcul des limites),但今天叫做优势函数法. 这方法的本质在于证明:具有一定收敛区域的自变量的幂级数确实满足这方程组. 我们将联系 Cauchy 关于常微分方程的工作来说明这个方法(第 29 章第 4 节). 他的定理仅包括方程中系数和初始条件都是解析的情形.

为了得到 Cauchy 工作的某些具体概念,我们将考虑隐含于两个自变量的二阶方程

$$r = f(z,\ x,\ y,\ p,\ q,\ s,\ t) \tag{55}$$

中的东西,像通常一样,其中 $r = \partial^2 z/\partial x^2$,而 f 对其变量是解析的. 在这情形下,人们必须在初始线 $x = 0$ 上指明

$$z(0,\ y) = z_0(y),\ \frac{\partial z}{\partial x}(0,\ y) = z_1(y),$$

其中 z_0 和 z_1 是解析的.(初始线可以改成曲线,在这情形下$\partial z/\partial x$必须改为$\partial z/\partial n$.)如果以上条件都满足了,那么解 $z = z(x,\ y)$ 是存在且唯一的,并且在某个从初始线出发的区域内解析.

Cauchy 关于方程组的工作被 Sophie Kowalewsky(1850—1891)②用稍为改进一点的形式独立地做出来了. Kowalewsky 是 Weierstrass 的学生并继承了他的思想. Kowalewsky 是少数有名望的女数学家之一. 1816 年 Sophie Germain(1776—1831)关于弹性的论文赢得了法国科学院授予的奖金. Kowalewsky 由于她 1888 年写的关于绕一固定点旋转的物体的运动方程的积分也赢

---

① *Comp. Rend.*, 14,1842, 1020～1025 = *Œuvres*, (1),6,461～467,和 *Comp. Rend.*, 15,1842,44～59,85～101,131～138 = *Œuvres*, (1),7,17～33,33～49,52～58.

② *Jour. für Math.*, 80,1875,1～32.

得了巴黎科学院的奖金;1889 年她在斯德哥尔摩当了数学教授. Cauchy 和 Kowalewsky 的证明后来被 Goursat[①] 改进了.

代替(55),如果给定的二阶方程形为

$$G(z, x, y, p, q, r, s, t) = 0, \tag{56}$$

那么在写成(55)的形式之前必须先解出 r. 考虑一个简单的但重要的情形,设方程是

$$G = A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + D\frac{\partial z}{\partial x} + E\frac{\partial z}{\partial y} + Fz = 0,$$

其中 $A, B, \cdots, F$ 是 x, y 的函数,于是为了解出 r, $\frac{\partial G}{\partial r}$ 必须不是 0. 在 $\partial G/\partial r = 0$ 的情形,Cauchy 问题的解并不一定存在,而当解存在时,它并不是唯一的. 在有三个或更多个自变量的情形(我们考虑三个),如果方程写为

$$\sum_{i,k} A_{ik}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_i B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = f, \tag{57}$$

其中系数是自变量 x_1, x_2, x_3 的函数,则例外情形发生于初始曲面 S 满足一阶偏微分方程

$$\sum A_{ik}\frac{\partial S}{\partial x_i}\frac{\partial S}{\partial x_k} = 0 \tag{58}$$

的时候. 沿着这样的曲面,(57)的两个解可以是相切的,甚至有高阶接触. 这个性质和一阶方程 $f(x, y, u, p, q) = 0$ 的特征曲线的性质(第 22 章第 5 节)是一样的,所以这些曲面也叫特征. 在物理上,这些曲面 S 就是波前.

关于特征的这个理论,对于两个自变量的情形,Monge 和 André-Marie Ampère(1775—1836)是知道特征的这个理论的. 把它推广到多于两个自变量的二阶方程的情形首先是由 Albert

① *Bull. Soc. Math. de France*, 26,1898,129～134.

Victor Bäcklund(1845—1922)[1]作出的,但在 Jules Beudon[2]再次把它作出之前知道的并不广泛.

20 世纪最主要的法兰西数学家 Jacques Hadamard(1865—1963),在他的《关于波的传播的讲义》(*Leçons sur la propagation des ondes*, 1903)中,把特征理论推广到了任意阶的偏微分方程. 作为例子,我们来考虑自变量为 x_1, x_2, …, x_n 而应变量为 ξ, η, ζ 的三个二阶偏微分方程的方程组. 这个方程组的 Cauchy 问题是:在 $n-1$ 维"曲面"M_{n-1} 上给定了 ξ, η, ζ 和 $\partial\xi/\partial x_n$, $\partial\eta/\partial x_n$, $\partial\zeta/\partial x_n$ 的值,求出函数 ξ, η 和 ζ. 于是,除非 M_{n-1} 满足一个六次的一阶偏微分方程,比如说 $H=0$, 否则函数 ξ, η 和 ζ 的二阶和高阶导数就都可以计算. 所有满足 $H=0$ 的"曲面"是特征"曲面". 根据一阶偏微分方程的理论,微分方程 $H=0$ 有由

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\partial H/\partial P_1}=\frac{\mathrm{d}x_2}{\partial H/\partial P_2}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x_{n-1}}{\partial H/\partial P_{n-1}}$$

定义的特征线(曲线),其中 P_1, P_2, …, P_{n-1} 是 x_n 沿"曲面" M_{n-1} 而取的关于 x_1, x_2, …, x_{n-1} 的偏导数. 这些线叫做原来二阶方程组的双特征. 在光的理论中,它们就是射线.

目前特征在偏微分方程的理论中起着重大的作用. 例如,在特征理论的基础上,Darboux[3]曾经给出积分两个自变量的二阶偏微分方程的强有力的方法. 它把问题转化为积分一个或多个常微分方程,包括了 Monge, Laplace 和其他一些人的方法.

另外一类存在性定理处理了 Dirichlet 问题,就是用直接方法或用 Dirichlet 原理的方法建立 $\Delta V=0$ 的解的存在性. 二维 Dirichlet 问题(但不是极小化 Dirichlet 积分的 Dirichlet 原理)的第一个存在性证明是由 Weierstrass 的学生 Hermann Amandus Schwarz(1843—1921)给出的. Schwarz 于 1892 年在柏林接替

---

① *Math. Ann.*, 13, 1878, 411~428.

② *Bull. Soc. Math. de France*, 25, 1897, 108~120.

③ *Ann. de l'Ecole Norm. Sup.*, (1), 7, 1870, 175~180.

Weierstrass,受到 Weierstrass 对此问题的提示.在关于边界曲线的普遍假设下,利用所谓交替法的手续[①],他证明了解的存在性[②].

在同一年,即 1870 年,Carl G. Neumann 用算术平均法给出了三维 Dirichlet 问题[③]的解的另一个存在性证明,而他也没用到 Dirichlet 原理[④].其思想主要发挥在他的《关于 Abel 积分的 Riemann 理论的讲义》(*Volesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale*)[⑤]中.

后来 Henri Poincaré[⑥] 用**扫除法**,即"扫出去"的方法,这方法处理问题的办法是,造出一系列在区域 R 上不调和但取正确边值的函数,这些函数变得越来越调和.

最后,David Hilbert 重建了 Thomson 和 Dirichlet 的变分方法,并建立了 Dirichlet **原理**,作为证明 Dirichlet 问题的解的存在性的一个方法.1899 年[⑦],Hilbert 证明了在区域、边值和允许函数的适当条件下,Dirichlet 原理确实成立.他使 Dirichlet 原理成为函数论中的一个有力工具.在含有 1901 年[⑧]做的工作的另一出版物中,Hilbert 给出了更为一般的条件.

Dirichlet 原理的历史是值得重视的.Green,Dirichlet,Thomson 以及他们那个时代的其他一些人把这原理认为完全可靠的方法并自由地运用它.后来,Riemann 在复变函数论中指明它对导出

---

① Schwarz 的方法见于 Felix Klein 的 *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, Chelsea (reprint), 1950,1, p.265,其中叙述了这个方法的大意;又见于 A. R. Forsyth 的 *Theory of Functions*, Dover (reprint), 1965,2,十七章,其中作了完整的叙述,在后一书中给出了许多文献.

② *Monatsber. Berliner Akad.*, 1870,767～795 = *Ges. Math. Abh.*, 2,144～171.

③ *Königlich Sächsischen Ges. der Wiss. zu Leipzig*, 1870,49～56,264～321.

④ 这方法描述于 O. D. Kellogg 的 *Foundations of Potential Theory*, Julius Springer, 1929,281ff 中.

⑤ 第二版,1884,238ff.

⑥ *Amer. Jour. of Math.*, 12,1890, 211～294 = *Œuvres*, 9,28～113.

⑦ *Jahres. der Deut. Math.-Verein.*, 8,1900, 184～188 = *Ges. Abh.*, 3,10～14.

⑧ *Math. Ann.*, 59,1904, 161～186 = *Ges. Abh.*, 3,15～37.

主要结果是非凡的工具. 所有这些人都明白基本的存在性问题还没有解决,甚至在 1870 年 Weierstrass 宣布他的批判之前,他怀疑这方法就已有几十年了. 后来,在本世纪,这原理被 Hilbert 所拯救、利用并扩充了. 假如前进步伐要使原理的应用等待 Hilbert 的工作,那么 19 世纪很大一段关于位势理论和函数论的工作就会丧失掉了.

Laplace 方程 $\Delta V = 0$ 是椭圆型微分方程的基本形式. 许多存在性定理是对更一般的椭圆型微分方程,诸如,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0 \tag{59}$$

建立的. 这种定理的变种是繁多的. 我们将只叙述一个关键的结果. 这方程的解的存在性和唯一性(解在边界上的值是规定好了的)是由 Picard① 对充分小的区域证明了的. 这结果已被 Picard 和其他人扩充到多变量、大区域和其他方面. Picard② 还证明了系数是解析的上述形式的(甚至是稍微更普遍一些的)方程在求解区域内仅具有解析解,即使这解取非解析的边界值也是这样.

迄今所讨论的定理已一般地处理了解析微分方程和解析初值或边界数据. 然而,这样一些条件对应用是太局限了,因为所给物理数据可能不是解析的. 另外一大类定理处理不太严厉的条件,我们将只给出一个例子. 应用于双曲方程的 Riemann 方法依赖于其特征函数 v 的存在性. 像我们指出过的,Riemann 没有证明 v 的存在性.

对于这个双曲方程的情形(见[40]),Du Bois-Reymond 在 1889 年寻找适当的条件并得到了结果③,这结果是对 $x =$ 常数与 $y =$ 常数都是特征的情形表达的,它是这样说的:如果沿曲线 AB

---

① *Comp. Rend.*, 107,1888,939~941; *Jour. de Math.*, (4),6,1890,145~210; *Jour. de Math.*, (5),2,1896,295~304.

② *Jour. de l'Ecole Poly.*, 60,1890,89~105.

③ *Jour. für Math.*, 104,1889,241~301.

给出了连续函数 u 与$\partial u/\partial n$,即任何特征线交曲线 AB 不多于一次,则存在这微分方程的一个并且只有一个解 u,它沿 AB 取 u 与 $\partial u/\partial n$ 的已给值.这解定义在过 A 与过 B 的特征所确定的矩形上.另外,如果连续函数 u 的值在互相联结的两特征线段上给定了,那么 u 在特征所确定的矩形上仍然是唯一确定的.用 x, y 和 u 作为空间坐标来表示,第一个结果说的是曲面 $u(x, y)$以给定倾斜度通过一给定空间曲线.第二个结果意味着解或曲面包含在两条相交的空间曲线所确定的空间里.对连续的初始条件 u 与 $\partial u/\partial n$(在第二种情形下是 u),解在上述矩形中将是正则的或处处满足偏微分方程.u 与$\partial u/\partial n$ 的间断性将沿着矩形中的特征传播.

19 世纪的后半叶,对区域 D 中 $\Delta u+k^2u=0$ 的特征值的存在性做了大量工作.主要结果是:对于已给区域和在三个边界条件 $u=0$, $\partial u/\partial n=0$, $\partial u/\partial n+hu=0$(当正法向量指向区域外面时,$h>0$)的任何一个之下,总有 k^2 的无穷多个离散值,而每一个值就有一个解.在二维情形,用沿边界固定的薄膜振动来说明这定理.k 的值是无穷多个纯粹谐振的频率,相应的解给出薄膜在实现其特征振动时的变形.

主要的第一步是 Schwarz① 的证明,他证明了

$$\Delta u+\xi f(x, y)u=0$$

的第一个特征函数的存在性,就是说,证明了存在一个 U_1,使得

$$\Delta U_1+k_1^2 f(x, y)U_1=0,$$

而在所考虑区域的边界上 $U_1=0$.他的方法给出了找解的步骤,并且可用于计算 k_1^2.后来 Picard② 证明了第二个特征值 k_2^2 的存在性.

Schwarz 在 1885 年的论文中还指出,当区域连续变化时,第一特征值 k_1^2 的值也连续地变化,且当区域变小时,k_1^2 无限增大.这

---

① *Acta. Soc. Fennicae*, 15,1885, 315～362 = *Ges. Math. Abh.*, 1,223～269.

② *Comp. Rend.*, 117,1893,502～507.

样,较小的膜发出较高的第一谐音.

1894 年 Poincaré① 证明了:

$$\Delta u + \lambda u = f \tag{60}$$

在一个有界三维区域内的所有特征值的存在性及其基本性质,这里 λ 是复数,在区域边界上 $u = 0$. u 的存在性是用推广了的 Schwarz 方法证明的. 其次他证明 $u(\lambda)$是复变数 λ 的整函数,其极点是实的,这些正是特征值 λ_n. 然后他得到特征解 U_i,即

$$\Delta U_i + k_i^2 U_i = 0 \quad (\text{在内部}),$$
$$U_i = 0 \quad (\text{在边界上}).$$

k_1^2 都是特征数(特征值),并确定相应特征解的频率.

在物理上,Poincaré 的结果有如下意义:(60)中的函数 f 可以想像为一个作用力. 力学系统的自由振动是那样一些振动,在其中强迫振动退化并变为无穷. 事实上,(60)是一个振动系统的方程,这系统被振幅为 f 的周期力激发;而其特征解就是系统的自由振动,它一次激发后就无限地持续下去. 这些自由振动的频率与 k_i 成比例,根据 Poincaré 的方法计算出来,它们就是对应于强迫振动 u 变为无穷的那些 $\sqrt{\lambda}$ 值.

在这世纪末,从 Schwarz 1885 年的基本论文开头的关于偏微分方程的初值问题和边值问题的系统理论,仍然是不成熟的. 这个领域的工作于 20 世纪迅速地铺开了.

参 考 书 目

Bacharach, Max: *Abriss der Geschichte der Potentialtheorie*, Vandenhoeck and Ruprecht, 1883.

Burkhardt, H.: "Entwicklungen nach oscillirenden Functionen und Integration der Differentialgleichungen der mathematischen Physik", *Jahres. der Deut. Math.-Verein.*, Vol. 10, 1908, 1～1804.

---

① *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 8, 1894, 57～155 = *Œuvres*, 9, 123～196.

Burkhardt, H. and W. Franz Meyer: "Potentialtheorie", *Encyk. der Math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1899～1916, Ⅱ A7b, 464～503.

Cauchy, Augustin-Louis: *Œuvres complètes*, Gauthier-Villars, 1890, (2), 8.

Fourier, Joseph: *The Analytical Theory of Heat* (1822), Dover reprint of English translation, 1955.

Fourier, Joseph: *Œuvres*, 2 vols., Gauthier-Villars, 1888～1890; Georg Olms (reprint), 1970.

Green, George: *Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*, 1828, reprinted by Wezäta-Melins Aktiebolag, 1958; also in Ostwald's Klassiker #61 (in German), Wilhelm Engelmann, 1895.

Green, George: *Mathematical Papers*, Macmillan, 1871; Chelsea (reprint), 1970.

Heine, Eduard: *Handbuch der Kugelfunktionen*, 2 vols., 1878～1881, Physica Verlag (reprint), 1961.

Helmholtz, Hermann von: "Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden", *Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften*, Wilhelm Engelmann, 1896.

Klein, Felix: *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im* 19. *Jahrhundert*, 2 vols., Chelsea (reprint), 1950.

Langer, R. E.: "Fourier Series, the Genesis and Evolution of a Theory", *Amer. Math. Monthly*, 54, Part Ⅱ, 1947, 1～86.

Pockels, Friedrich: *Über die partielle Differentialgleichung* $\Delta u + k^2 u = 0$, B. G. Teubner, 1891.

Poincaré, Henri: *Œuvres*, Gauthier-Villars, 1954, 9.

Rayleigh, Lord (Strutt, John William): *The Theory of Sound*, 2nd ed., 2 vols., Dover (reprint), 1945.

Riemann, Bernhard: *Gesammelte mathematische Werke*, 2nd ed., Dover (reprint), 1953, pp. 156～211.

Sommerfeld, Arnold: "Randwertaufgaben in der Theorie der Partiellen Differentialgleichungen", *Encyk. der math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1899～1916, Ⅱ A7c, 504～570.

Todhunter, Isaac, and Karl Pearson: *A History of the Theory of Elasticity*, 2 vols., Dover (reprint), 1960.

Whittaker, Sir Edmund: *History of the Theories of Aether and Electricity*, rev. ed., Thomas Nelson and Sons, 1951, Vol. Ⅰ.

第 29 章

19 世纪的常微分方程

物理不仅仅给我们以解决问题的机会……而且还使我们预料到它的解.

Henri Poincaré

1. 引　　言

常微分方程是 18 世纪在直接回答物理问题中兴起的. 在着手处理更为复杂的物理现象,特别是在弦振动的研究中,数学家们得到了偏微分方程. 在 19 世纪这两个课题的地位略有倒转. 用变量分离法解偏微分方程的努力导致求解常微分方程的问题. 此外,因为偏微分方程都是以各种不同的坐标系表出的,所以得到的常微分方程是陌生的,并且不能用封闭形式解出. 数学家们便采用无穷级数解,今天叫做特殊函数或高级超越函数,以便与 $\sin x$, e^x, $\log x$这样的初等超越函数相区别.

对于扩充了的常微分方程类做了许多研究以后,针对这种方程类型的某些深刻的理论研究展开了. 这些理论研究也把 19 世纪的工作与 18 世纪的工作区别开来. 像偏微分方程的情形一样,这新世纪的贡献是如此繁多,以至我们不能指望综观其所有的主要发展. 我们的论题是这世纪内创作的一个样品.

2. 级数解和特殊函数

正如我们刚才已经说过的,为了求解应用变量分离法于偏微

分方程后所得的常微分方程,数学家们没有过分忧虑解的存在性和解应具有的形式,而转向无穷级数的方法(第21章第6节).从变量分离得到的常微分方程中最重要的是Bessel方程

$$(1)\qquad x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0,$$

其中 n 是参数,可以是复的,x 也可以是复的.然而,对数学家兼哥尼斯堡(Königsberg)天文台台长Friedrich Wilhelm Bessel(1784—1846)来说,n 与 x 都是实的.这个方程的特殊情形早在1703年就发现了,Jacob Bernoulli在给Leibniz的一封信里作为特解就谈到了它,此后,在Daniel Bernoulli和Euler的更广博的著作中又谈到过(第21章第4、6节,第22章第3节).特殊情形还出现于Fourier和Poisson的著作中.对这个方程的解的最早的系统研究是由Bessel在研究行星运动时作出的[①].对每个 n,这方程有两个独立的解,今天记为 $J_n(x)$ 和 $Y_n(x)$,分别叫作第一类和第二类Bessel函数.Bessel自1816年开始,对这方程进行研究,首先(对整数 n)给出积分关系式

$$J_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(nu-x\sin u)du$$

(他写这为 I_k^h,而他的 k 就是我们的 x).Bessel还得到级数

$$(2)\quad J_n(x)=\frac{x^n}{2^n\Gamma(n+1)}\times\left\{1-\frac{x^2}{2^2\cdot 1!\,(n+1)}+\frac{x^4}{2^4\cdot 2!\,(n+1)(n+2)}-\cdots\right\}.$$

1818年Bessel证明了 $J_n(x)$ 有无穷多个实零点.在1824年的论文中,Bessel还(对整数 n)给出递推公式

$$xJ_{n+1}(x)-2nJ_n(x)+xJ_{n-1}(x)=0,$$

和别的许多牵涉到第一类Bessel函数的关系式.把Bessel函数 $J_n(x)$ 中的 n 和 x 取值为复数,并使(2)保持为正确公式的推广是

---

① *Abh. Konig. Akad. der Wiss. Berlin*, 1824, 1～52, pub. 1826 = *Werke*, 1, 84～109.

由几个人①作出来的.

因为二阶方程应当有两个独立的解,所以很多数学家都去寻找它们. 当 u 不是整数时,这第二个解是 $J_{-n}(x)$. 对于整数 n,第二个解是由 Carl. G. Neumann② 找出来的. 然而,今天最普遍采用的公式是 Hermann Hankel(1839—1873)③找到的,即

$$Y_n(z)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r[(1/2)z]^{n+2r}}{r!(n+r)!}\left\{2\log\left(\frac{z}{2}\right)+2\gamma-\sum_{m=1}^{n+r}\frac{1}{m}-\sum_{m=1}^{r}\frac{1}{m}\right\}-\sum_{r=0}^{n-1}\frac{[(1/2)z]^{-n+2r}(n-r-1)!}{r!},$$

其中 γ 是 Euler 常数. Neumann④ 还给出解析函数 $f(z)$ 的展开式,即

$$f(z)=\alpha_0J_0(z)+\alpha_1J_1(z)+\alpha_2J_2(z)+\cdots,$$

其中 α_i 是可以确定的常数.

许多数学家,通常是研究天体力学的数学家,独立地得到了 Bessel 函数和成百个别的关系式以及这些函数的表达式. 论述这些函数的庞杂文献中的一些思想可以从 G. N. Watson 的《Bessel 函数论教程》⑤(*A Treatise on the Theory of Bessel Functions*)中得到.

Legendre 多项式或单变量球函数和两个自变数的球面函数早已由 Legendre 和 Laplace 引进了(第 22 章第 4 节). Legendre 多项式满足 Legendre 微分方程

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0.$$

如我们所知,这个方程是对以球坐标表示的位势方程应用分离变量法而得到的. 1833 年,剑桥大学的一位校务委员 Robert Mur-

① 主要由 C. J. Lommel(1837—1899)在他的 *Studien über die Bessel'schen Functionen* 中作出的(1868).

② *Theorie der Bessel'schen Funktionen*, 1867, 41.

③ *Math. Ann.*, 1, 1869, 467~501.

④ *Jour. für Math.*, 67, 1867, 310~314.

⑤ Cambridge Univ. Press, 1944 年第二版.

phy(死于 1843 年)写了一本教科书:《电、热和分子作用理论的基本原理》(*Elementary Principles of the Theories of Electricity, Heat and Molecular Actions*). 在书中,他收集了有关 Legendre 多项式的一些老的结果,并得到了一些新的结果. 因为大部分结果早已为人所知,所以我们不介绍 Murphy 著作的细节,只是指出:它是系统性的著作,并且他证明了"任何"函数 $f(x)$,通过逐项积分和正交性质(积分定理),可以按 $P_n(x)$ 展开.

Heine[①] 在论述旋转椭球体外部的位势问题和同心旋转椭球面之间的壳体的位势问题时(第 28 章第 5 节)引进了第二类球面调和函数,通常记为 $Q_n(x)$,这函数为 Legendre 方程提供了第二个独立解. 像 Bessel 函数一样,Legendre 函数已扩充到复的 n 和复的 x,还得到了若干别的表示式以及它们之间的关系式[②].

特殊函数作为常微分方程的级数解而出现,它的研究由 Gauss 在 1812 年关于超几何级数的一篇著名论文[③]加以推进. 在这篇论文中,Gauss 没有用到微分方程

$$x(1-x)y''+\{\gamma-(\alpha+\beta+1)x\}y'-\alpha\beta y=0,$$

但他在未发表的材料中确实用到了这方程[④]. 当然,这方程及其级数解

$$(3)\quad F(\alpha,\beta,\gamma;x)=1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2+\cdots$$

早已为人们熟知了,因为它们已由 Euler 研究过(第 21 章第 6 节). Gauss 认识到对于 α, β, γ 的特殊值,这级数包括了几乎所有当时已知的初等函数和许多像 Bessel 函数、球函数那样的高级超越函数. 除了证明这些级数的一些性质外,Gauss 还建立了著名的

---

① *Jour. für Math.*, 26, 1843, 185~216.

② 例如看 E. W. Hobson 的 *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*, 1931 年, Chelsea(重印), 1955.

③ *Comm. Soc. Sci. Gott.*, 2, 1813 = *Werke*, 3, 123~162.

④ *Werke*, 3, 207~230.

关系式：

$$F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ 1)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}.$$

他还建立了这级数的收敛性(参考第 40 章第 5 节). 记号 $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ x)$应归源于 Gauss.

另一类特殊函数是由 Lamé 引进的[①]. 在第 28 章第 5 节中，我们曾经指出 Lamé 在研究椭球内稳态的热分布时，用椭球坐标 ρ, μ, ν 分离了 Laplace 方程. 这个程序对这三个变量中的每一个都给出同一个常微方程，即

$$(4)\quad (\rho^2-h^2)(\rho^2-k^2)\frac{d^2E(\rho)}{d\rho^2}+\rho(2\rho^2-h^2-k^2)\frac{dE(\rho)}{d\rho}$$
$$+\{(h^2+k^2)p-n(n+1)\rho^2\}E(\rho)=0,$$

对 μ 和 ν 要用适当的变换代到 ρ 的位置上去. 这里 h^2 和 k^2 是坐标曲面族方程中的参数，而 p 和 n 则是常数. 这方程叫做 Lamé 微分方程，它的解 $E(\rho)$叫做 Lamé 函数或椭球调和函数. 对于整数 n，这些函数归属于下列四类形式：

$$E_n^p(\rho)=a_0\rho^n+a_1\rho^{n-2}+\cdots,$$

或者是这种多项式乘上$\sqrt{\rho^2-h^2}$，或者乘上 $\sqrt{\rho^2-k^2}$，或者乘上 $\sqrt{\rho^2-h^2}$ 和$\sqrt{\rho^2-k^2}$ 两个因子. 对于 n 的给定值，这种函数(保证 $E(\rho)$的某些性质)的个数是 $2n+1$.

Lamé 方程的第二个解(从 $E(\rho)$的其他条件或性质得到)是

$$F_n^p(\rho)=(2n+1)E_n^p(\rho)\int_\rho^\infty\frac{d\rho}{\sqrt{(\rho^2-h^2)(\rho^2-k^2)[E_n^p(\rho)]^2}},$$

这种函数叫做第二类 Lamé 函数. 这些都是由 Liouville[②] 和 Heine[③] 引进的.

微分方程

---

① *Jour. de Math.*, 2, 1837, 147～183; 4, 1839, 126～163.

② *Jour. de Math.*, 10, 1845, 222～228.

③ *Jour. für Math.*, 29, 1845, 185～208.

$$\frac{d^2\phi}{d\eta^2}+(a-2k^2\cos 2\eta)\phi=0,\ \frac{d^2\psi}{d\xi^2}-(a-2k^2\cosh 2\xi)\psi=0$$

出现在 Mathieu 关于椭圆薄膜振动的工作中[1],他们还出现于椭圆柱的位势问题中,那是把方程 $\Delta u+k^2u=0$ 用二维椭圆柱坐标表示,然后应用变量分离法而引起的.碰巧,这些椭圆坐标由方程

$$x=h\cosh\xi\cos\eta,\ y=h\sinh\xi\sin\eta$$

与直角坐标相联系,其中 $x=\pm h,\ y=0$ 是在椭圆坐标系里同焦椭圆族和双曲线族中诸椭圆和双曲线的焦点.表达 Mathieu 方程的各种形式以及不同作者对解所取的许多记号是纷繁的,用两个微分方程中的任一个定义的函数叫作椭圆柱的 Heine 函数,现在叫作 Mathieu 函数.Mathieu 和 Heine 首先得到解的级数表达式.后来他们企图固定参数 a,使得一类解成为以 2π 为周期的周期解.寻求周期解的问题对物理应用是最重要的问题,在这整个世纪中都在努力研究这个问题.1883 年[2] Gaston Floquet 发表了关于 n 阶线性微分方程(它的系数有同一周期 ω)的周期解的存在性及其性质的一篇完整的讨论.解的普遍性质已经确定之后,后来的作者集中很大注意力于发现找出解的实际方法的问题,但没有发现普遍的方法(参看第 7 节).

广泛地研究过的一类特殊函数是 Heinrich Weber(1842—1913)在 1868 年引进的[3].Weber 对两抛物线围成的区域内积分 $\Delta u+k^2u=0$ 感到兴趣,所以他把直角坐标通过变换

$$x=\xi^2-\eta^2,\ y=2\xi\eta$$

变到抛物线坐标(它是椭圆坐标的极限情形).$\xi=$ 常数和 $\eta=$ 常数这两族曲线是抛物线族,一族中每一条与另一族中各曲线正交.Weber 用变量分离法从简化后的波动方程导出的常微分方

① *Jour. de Math.*, (2),13,1868,137～203.

② *Ann. de l'Ecole Norm. Sup.*, (2),12,1883,47～88.

③ *Math. Ann.*, 1,1869,1～36.

程是

$$\frac{d^2 E}{d\xi^2} + (k^2 \xi^2 + a)E = 0,$$

$$\frac{d^2 H}{d\eta^2} + (k^2 \eta^2 - a)H = 0.$$

Weber 用定积分的形式给出了第二个方程的四个特解，这些解叫作抛物柱函数. Weber 还指出，在所有正交坐标系中，可对 $\Delta u + k^2 u = 0$ 应用变量分离法的唯一情形是二阶同焦曲面或由之而得的特殊分支.

特殊函数类要比我们这里所能摘述的远为繁多. 上述类型和引入的许多其他类型足供在某有界区域内解微分方程之用，也可用于在这区域内表示任意函数(通常是偏微分方程问题的初始函数)之用. 有界区域的限制是由于正交性质而施加的. 在三角函数的基本情形中，这区域是$(-\pi, \pi)$，因为，比如说，

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = 0, \; m \neq n.$$

在无穷区间或半无穷区间上解常微分方程的问题以及在这些区间上求得任意函数的展开式问题，在这世纪的后半期也为许多人研究过，像 Hermite 函数这样的特殊函数首先由 Hermite 在 1864 年①，Nikolai J. Sonine(1849—1915)在 1880 年②引入，把它作为解这个问题之用.

为了使用这些特殊函数的所有类型，必须知道它们的性质，就像对初等函数的性质一样熟悉. 还因为这些特殊函数更为复杂，所以其性质也同样复杂. 原始论文和教科书中的文献几乎是难以置信地庞杂. 对于 Bessel 函数、球函数、椭球函数、Mathieu 函数以及其他类型的函数已经有了完整的专门论著.

---

① *Comp. Rend.*, 58, 1864, 93～100 和 266 ～ 273 = *Œuvres*, 2, 293～308.

② *Math. Ann.*, 16, 1880, 1～80.

3. Sturm-Liouville 理论

牵涉到数学物理中偏微分方程的问题,通常包含一些边界条件,如像振动的弦必须在端点固定这样的条件. 当分离变量法应用于偏微分方程时,这方程就分解为两个或多个常微分方程,而加在所求解上的边界条件就变成一个常微分方程的边界条件. 一般说来这常微分方程包含一个参数,事实上它是从变量分离的过程中得来的,而给参数赋以特殊值,通常可得到方程的解. 这些值叫特征值或本征值,而相应于任一特征值的解叫特征函数. 此外,为了适合起先的条件或原问题的条件,必须把给定的函数 $f(x)$ 用特征函数表出(例如看第 28 章的[11]).

确定带边界条件的一个常微分方程的特征值和特征函数的问题,以及把给定的函数展为特征函数的无穷级数的问题(大约起自 1750 年),随着新坐标系的引入和新的函数类像 Bessel 函数、Legendre 多项式、Lamé 函数、Mathieu 函数等作为常微分方程的特征函数而兴起,就变得更为突出了. 巴黎大学理学院(Sorbonne)力学教授 Charles Sturm(1803—1855)和 Sturm 的朋友、法兰西学院的数学教授 Joseph Liouville(1809—1882),这两人决定着手钻研任何二阶常微分方程的一般问题. Sturm 从 1833 年起就已经从事研究偏微分方程的问题. 最初是从事变密度棒中热流问题的研究,所以他是完全知道特征值和特征函数的问题的.

他应用于这个问题上的数学思想①是与他对代数方程的根的实性和分布的研究密切联系着的. 他说,他关于微分方程的思想是从差分方程的研究并过渡到极限而得来的.

Sturm 告诉 Liouville 他正在研究的问题后,Liouville 也研究

---

① *Jour. de Math.*, 1,1836,106～186 与 373～444.

起同一课题来了①. 这两人的几篇论文中的结果是十分详尽的,可用近代的记号最方便地概述如下:他们考虑一般的二阶方程

$$Ly'' + My' + \lambda Ny = 0, \tag{5}$$

其中 L, M, N 是 x 的连续函数,L 不为零,λ 是参数. 遍乘以 $L^{-1}e^{\int ML^{-1}dx}$ 后,方程可以改成

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + \lambda\rho(x)y = 0,\ p(x) > 0,\ \rho(x) > 0.$$

原方程和变换后的方程所应满足的边界条件可以有一般形式

$$\begin{aligned} y'(a) - h_1 y(a) &= 0, \\ y'(b) + h_2 y(b) &= 0, \end{aligned} \quad h_1 \geqslant 0,\ h_2 \geqslant 0,\ a < b.$$

Sturm 和 Liouville 证明了下列基本结果:

(a) 仅当 λ 取递增到∞的正数序列 λ_n 的任一值时,这问题才有非零解.

(b) 对每一 λ_n,解是一函数 v_n 的倍数,而 v_n 可以用条件 $\int_a^b \rho v_n^2 dx = 1$ 加以规范化.

(c) 成立正交性质 $\int_a^b \rho v_m v_n dx = 0,\ m \neq n$.

(d) 每个在区间(a, b)上二次可微的、满足边界条件的函数 f 可以展为一致收敛的级数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n(x),$$

其中 $c_n = \int_a^b \rho f v_n(x) dx$.

(e) 等式

$$\int_a^b \rho f^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$$

普遍成立. 这最后的等式叫做 Parseval 等式. 已由 Mare-Antoine

---

① *Jour. de Math.*, 1,1836,253~265;2,1837,16~35 和 418~436.

Parseval(? —1836)在 1799 年①纯形式地对三角函数集证明过了.随之而来的是 Bessel 在 1828 年证明的②(还是关于三角级数的)不等式,即

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \leqslant \int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x.$$

实在说,Sturm-Liouville 的结果并不是在所有方面都令人满意的. $f(x)$可以表为特征函数的无穷和的证明是不充分的. 一个困难是关于特征函数集的完全性的事实,对(a, b)上的连续函数 $f(x)$,这就是上面的条件(e),粗糙地看,这意味着特征函数集大得足以表示"任何"函数 $f(x)$. 另外,虽然 Liouville 用 Cauchy 和 Dirichlet 发展的理论确实给出了某种情形下$\sum c_n v_n(x)$收敛到 $f(x)$的证明,但是级数$\sum c_n v_n(x)$是在何种意义下收敛到 $f(x)$的问题,是逐点收敛、一致收敛还是在某种更一般意义下的收敛,还没有包括进去.

4. 存 在 定 理

在 19 世纪的偏微分方程那一章,在同一标题下,我们已经说到,当数学家们发现求解特殊微分方程的问题越来越困难时,他们就转向这样的问题:给定一个微分方程,它对于给定的初始条件和边界条件是否有解? 当然希望在常微分方程中也会出现同样的转变. 存在性问题被忽视了这么长时间,部分原因是微分方程发生在物理问题和几何问题中,而在直觉上则很清楚,这些问题是有解的.

Cauchy 是考虑微分方程解的存在性问题的第一个人,并成功地给出了两个方法. 第一个方法可以应用于

---

① *Mém. des sav. étrangers*, (2),1,1805,639～648.

② *Astronom. Nach.*, 6,1828,333～348.

(6) $$y' = f(x, y),$$

这是在 1820 年到 1830 年间某一时候创立的，综述在他的《分析练习》中①.

这方法的本质可以从 Euler 的著作②中找到，它利用了在积分作为和的极限中所包含的同样的想法. Cauchy 想证明有一个而且只有一个 $y = f(x)$ 满足(6)式，并且适合给定的初始条件 $y_0 = f(x_0)$. 他分(x_0, x)为 n 部分 $\Delta x_0, \Delta x_1, \cdots, \Delta x_{n-1}$并作

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)\Delta x_i,$$

其中 x_i 是 Δx_i 中 x 的任一值. 然后定义

$$y_n = y_0 + \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i)\Delta x_i.$$

现在 Cauchy 证明当 n 趋于无穷时，y_n 收敛到一个唯一的函数

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\mathrm{d}x,$$

并证明这个函数满足(6)式和初始条件.

Cauchy 假定 $f(x, y)$和 f_y 在由区间(x_0, x)和(y_0, y)所确定的矩形内部对 x, y 的所有实值都是连续的. 1876 年 Rudolph Lipschitz(1832—1903)把这定理的假设减弱了③. 他的基本条件是：存在常数 K 使得对矩形 $|x - x_0| \leqslant a$, $|y - y_0| \leqslant b$ 内所有的(x, y_1)和(x, y_2)(即具有同一横坐标的任意两点)，满足

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < K(y_1 - y_2).$$

这个条件叫 Lipschitz 条件，而这条存在性定理就叫做Cauchy-Lipschitz定理.

Cauchy 的建立微分方程解的存在性的第二个方法，即控制函数或优势函数的方法，比他的第一个方法可有更广泛的应用，Cauchy 把它用到了复数域. 这个方法表述于 1839—1842 年间《报

---

① Vol. 1, 1840, 327ff. = *Œuvres*, (2), 11, 399～465.

② *Inst. Cal. Int.*, 1, 1768, 493.

③ *Bull. des Sci. Math.*, (1), 10, 1876, 149～159.

告》上的一系列论文中①. Cauchy 把这方法叫做**极限的计算**(calcul des limites),因为他提供了下极限,在这些下极限范围内,已经建立了存在性的解保证收敛. 这个方法为 Briot 和 Bouquet 所简化,这两个人的作法②已经成为标准的了.

为了说明这方法,我们注意它是怎样应用于

$$y' = f(x, y)$$

的,其中 f 关于 x 和 y 是解析的. 所要建立的定理这样说:对于

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y), \tag{7}$$

如果函数 $f(x, y)$在 $P_0 = (x_0, y_0)$ 的邻域内解析,那么微分方程有唯一解 $y(x)$,它在 x_0 的邻域内解析,而当 $x = x_0$ 时它等于 y_0. 这解可以用级数

$$y = y_0 + y_0'(x - x_0) + \frac{y_0''}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y_0'''}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots \tag{8}$$

表示,其中 y'是(x_0, y_0)处的 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$,而 y_0'', y_0''', …的意义类似,其中的导数由原来微分方程经逐次微分来确定,y 则作为 x 的函数来对待.

证明的方法我们仅给一概要. 首先利用这样的事实:因为 $f(x, y)$在(x_0, y_0)的邻域内解析,为了方便,我们取(x_0, y_0)为$(0, 0)$,于是有一个以 $x_0 = 0$ 为圆心、以 a 为半径的圆和一个以 $y_0 = 0$ 为圆心、以 b 为半径的圆,使 $f(x, y)$在其中解析. 于是对落在相应圆中的一切 x, y 的值,$f(x, y)$有一个上界 M. 现在获得级数(8)的方法本身就保证它形式地满足(7),于是问题是要证明这级数收敛.

为达到这目的,设立优势函数

---

① *Œuvres*, (1), Vols. 4～7 和 10. 最重要的论文在 *Comptes Rendus* 的下列诸号上:Aug. 5, Nov. 21, 1839, June 29, Oct. 26, Nov. 2 和 Nov. 9, 1840, June 20, July 4, 1842.

② *Comp. Rend.*, 39, 1854, 368～371.

$$F(x,\ y)=\sum \frac{M}{a^{p}b^{q}}x^{p}y^{q},$$

它是

$$F(x,\ y)=\frac{M}{(1-x/a)(1-y/b)} \tag{9}$$

的展开式. 然后证明

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x}=F(x,\ Y) \tag{10}$$

的级数解,即

$$Y=Y_0'x+Y_0''\frac{x^2}{2!}+Y_0'''\frac{x^3}{3!}+\cdots, \tag{11}$$

逐项控制着级数(8). 级数(11)是从(10)导出的,用的是由(7)导出(8)的相同办法. 所以如果级数(11)收敛,那么(8)也就收敛. 为了证明(11)收敛,就用(9)中 F 的值明显地解出(10),然后再证明解的级数展开必定是(11),并且收敛.

这方法本身确定不出关于 y 的级数的准确收敛半径,所以人们用大量的努力专致于证明这半径可以扩大. 然而所有论文都没有给出全部收敛区域,所以没有多大实际的重要性.

确立常微分方程解的存在性的第三个方法(Cauchy 也许是知道的),首先是 Liouville 对一个二阶方程的情形发表出来的①. 这就是逐次逼近法,今天已把荣誉归于 Emile Picard,因为他给出了这方法的普遍形式②. 对于实变量 x 和 y 的方程

$$y'=f(x,\ y),$$

其中 $f(x,\ y)$ 对 $x,\ y$ 解析,方程的解 $y=f(x)$ 要通过点 $(x_0,\ y_0)$,这方法是引进一串函数

$$y_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,\ y_0)\mathrm{d}t,$$

---

① *Jour. de Math.*, (1), 3, 1838, 561~614.

② *Jour. de Math.*, (4), 6, 1890, 145~210 和(4), 9, 1893, 217~271.

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\mathrm{d}t,$$

……

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\mathrm{d}t.$$

然后证明 $y_n(x)$趋于一极限 $y(x)$，它就是一个而且是唯一的一个满足常微分方程和 $y(x_0) = y_0$ 的 x 的连续函数. 像今天通常所看到的，这方法须假定 $f(x, y)$满足 Lipschitz 条件. 这方法已由 Picard 在 1893 年的论文中用到二阶方程上去，并且还扩充到复的 x, y 的情形.

上述各种方法不仅已应用于高阶常微分方程，而且还应用于复变量的微分方程组. 例如 Cauchy 就把他的第二类存在性定理推广到 n 个应变量的一阶常微分方程组. 他还曾把这个极限计算方法推广到复域中的方程组[①]. Cauchy 的结果现叙述如下：给定方程组

$$(12)\quad \frac{\mathrm{d}y_k}{\mathrm{d}x} = f_k(x, y_0, \cdots, y_{n-1}),\ k = 0, 1, 2, \cdots, n-1,$$

令 $f_0, \cdots, f_{n-1}$是其变量的单演(单值解析)函数，并设它们可在初值

$$x = \xi,\ y_0 = \eta_0,\ \cdots,\ y_{n-1} = \eta_{n-1}$$

的邻域内用

$$x - \xi,\ y_0 - \eta_0,\ \cdots,\ y_{n-1} - \eta_{n-1}$$

的正整数幂展开. 于是有在 $x = \xi$ 的邻域内收敛的 $x - \xi$ 的 n 个幂级数，把它们代入(12)的 $y_0, \cdots, y_{n-1}$时满足方程. 这些幂级数是唯一的. 它们给出方程组取初值的一个正则解. 这个在普遍意义下的结果可以在 Cauchy 的《关于采用所谓极限计算的新计算法解微分方程组的报告》[②]中找到. 这样，这一思想对建立解的存在性

① 关于一阶微分方程组的不同的存在性证明，请看本章末尾书目中 Painlevé 的第二本参考书.

② *Comp. Rend.*, 15, 1842, 14～25 = *Œuvres*, (1), 7, 5～17.

和在复平面上的一点邻域内求出这解来说,已是够满意的了.在同一年(1842)里,Weierstrass 曾得到同样的结果,但直到 1894 年才于全集上发表①.

5. 奇 点 理 论

19 世纪中期,常微分方程的研究走上了一个新的历程.存在定理和 Sturm-Liouville 理论都预先假设在考虑解的区域内,微分方程包含解析函数或至少包含连续函数.另一方面,某些已经考虑过的微分方程,如像 Bessel 方程、Legendre 方程、超几何方程,当把它们表示得使二阶导数的系数为 1 时,它们就有奇异的系数,在奇异点的邻域内级数解的形式是特别的,尤其是第二个解.所以数学家们便转而研究奇点邻域内的解,也就是一个或多个系数在其上奇异的那种点的邻域内的解.一个点,所有系数在其上至少连续而通常是解析的,就叫作常点.

在奇点邻域内的解可以用级数得出,关于级数的适当形式的知识必须在计算它之前就掌握.这知识只能从微分方程得到.这个新问题由 Lazarus Fuchs(1833—1902)在 1866 年的一篇论文(见下面)中描述:"在科学的现状下,微分方程的理论问题,不像从微分方程本身推演出它的积分在全平面各点即复变量的所有值上的性态那样,那么多地把给定微分方程归结为求积分问题."对于这个问题,Gauss 关于超几何级数的工作指明了道路.先导者是 Riemann 和 Fuchs,后者是 Weierstrass 的学生和他在柏林的继承者.这方面研究得到的理论叫做线性微分方程的 Fuchs 理论.

在这个新领域中,人们的注意力集中于形为

$$y^{(n)} + p_1(z)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(z)y = 0 \tag{13}$$

---

① *Math. Werke*, 1,75~85.

的线性微分方程，其中 $p_i(z)$ 除在孤立奇点外是复变数 z 的单值解析函数. 这个方程之所以受到注意，是因为它的解包括所有初等函数甚至某些高等函数，例如我们以后将要谈到的模函数和自守函数.

在考虑奇点上和奇点邻域内的解之前，我们指出一个基本定理，它是由 Fuchs 直接证明的①，虽然 Fuchs 自认得益于 Weierstrass 的讲演，但这定理确是从 Cauchy 关于常微分方程组的存在性定理推导出来的. 如果系数 p_1, …, p_n 在点 a 及其某一邻域内解析，并且如果在 $z=a$ 给出了 y 和 y 的头 $n-1$ 阶导数的任意初值，那么 y 就有以 z 表示的形如

$$(14)\qquad y(z)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}y^{(r)}(a)(z-a)^r$$

的唯一的幂级数解. Fuchs 给 Cauchy 的结果增添的是：这级数在以 a 为中心、$p_i(z)$ 在其中解析的任何圆内绝对并一致收敛. 从此推得这解仅能在系数为奇异的地方具有奇异性.

奇点邻域内的解的研究是由 Briot 和 Bouquet 起始的②. 因为他们关于一阶线性方程的结果很快就得到了推广，所以我们将考虑更为普遍一些的论述.

为了知道解在奇点邻域内的性态，Riemann 提出了一条非凡的途径. 虽然在(13)中假定 $p_i(z)$ 除了在孤立奇点外是单值解析函数，解 $y_i(z)$ 除了可能在奇点外都是解析的，但在 z 值的整个区域内一般说来并不是单值的. 假定有一个基本解系，$y_i(z)(i=1, 2, \cdots, n)$，即上面定理中指明类型的 n 个独立解. 那么通解就是

$$y=c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n,$$

其中 c_i 是常数.

如果现在我们探索一下一个解析的 y_i 沿着一条含有奇点的

① *Jour. für Math.*, 66,1866, 121～160 = *Math. Werke*, 1,159 ff.

② *Jour. d'Ecole Poly.*, (1),21,1856,85～132,133～198,199～254.

闭路径的性态,那么虽然 y_i 仍保持为微分方程的解,但它的值要变到同一函数的另一分支上去.因为任何解都是 n 个特解的线性组合,所以改变了的 y_i,不妨记为 y_i',仍是 y_i 的线性组合.这样,我们得到

$$
\begin{aligned}
y_1' &= c_{11}y_1 + \cdots + c_{1n}y_n,\\
y_2' &= c_{21}y_1 + \cdots + c_{2n}y_n,\\
&\cdots\cdots\\
y_n' &= c_{n1}y_1 + \cdots + c_{nn}y_n.
\end{aligned} \tag{15}
$$

这就是说,当每个 y_i 沿包含奇点的一条闭路径运动时,$y_1, \cdots, y_n$ 就经受一定的线性变换.对于绕每一奇点或绕多个奇点组合的任一闭路径,就会出现这样一个变换.这些变换的集合形成一个群[①],按 Hermite 取的名词[②],这个群叫作微分方程的单值群.

Riemann 求得奇点邻域内解的特征的途径见于他在 1857 年的论文《对可用 Gauss 级数 $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ 表示的函数的理论的补充》[③].如 Gauss 所知,超几何微分方程有三个奇点 $0, 1, \infty$.这时 Riemann 对复的 x 证明了:为得到二阶微分方程的特解在奇点附近的性态的一些结论,不必知道微分方程本身,而只需知道当自变量沿着围绕三个奇点的诸闭路径变动时,两个独立解是怎样变动的.这就是说,对于每个奇点,我们必须知道变换

$$y_1' = c_{11}y_1 + c_{12}y_2, \quad y_2' = c_{21}y_1 + c_{22}y_2.$$

这样,Riemann 处理用微分方程定义的函数的思想就是:从关于单值群的知识导出这些函数的性质.他的 1857 年的论文处理了超几何微分方程,但是他的计划是讨论带代数系数的 n 阶线性微分方程.Riemann 在 1857 年写的一个没有发表的片断,直到 1876

---

① 在 Riemann 那个时代,群的代数概念已经知道了.在本书第 31 章中将要介绍这一点.然而,这里需要知道的是:两个相继交换的作用仍是集里的一个变换,每个变换的逆仍属于这个集.

② *Comp Rend.*, 32, 1851, 458～461 = *Œuvres*, 1, 276～280.

③ *Werke*, 67～83.

年才见之于他的全集中①，在这片断里 Riemann 考虑了比有三个奇点的二阶方程更为普遍的方程．因此他假定有 n 个函数，除了在某些任意指定的点（奇点）上之外，是一致、有限和连续的，并且当 z 绕这种点走一闭回路时经受一个任意指定的线性替换．然后他证明这种函数系要满足一个 n 阶线性微分方程，但是他没有证明这些分支点（奇点）和这些替换可以任意选择．他的这工作在此处是不完全的，留下了叫做 Riemann 问题的未解决问题：在复平面上给定 m 个点 a_1, …, a_m，每点结合一个形如(15)的线性变换，在关于这些奇点的单值群的性态的基本假定的基础上（以这些性质不是已经确定为限），要证明：满足一个以 a_i 为奇点（支点）的 n 阶线性微分方程的函数类 y_1, …, y_n 就确定了，并使得当 z 绕 a_i 点的闭路径走一周后，这些 y_i 就经受一个与 a_i 联系着的线性变换．

以 Riemann 1857 年关于超几何方程的论文为指导，Fuchs 把奇点的工作做得更深入了．从 1865 年开始② Fuchs 和他的学生着手研究 n 阶微分方程，而 Riemann 已发表的还只是关于 Gauss 超几何微分方程问题．Fuchs 没有沿着 Riemann 的途径走，而直接研究微分方程．Fuchs 不但把线性微分方程，而且把微分方程的整个理论普遍地移植到复函数论的领域．

Fuchs 在上面提到的论文内给出了他关于常微分方程的主要工作．他从以 x 的有理函数为系数的 n 阶线性微分方程出发，通过仔细地考察形式上满足这方程的级数的收敛性，他发现方程的奇点是固定的，即不依赖于积分常数，而且可以在积出之前就找到，因为它们就是微分方程的系数的极点．

接着他证明，当自变量 z 描出围绕奇点的一个回路时，基本解系就经受一个常系数的线性变换．从解的这个性态他导出了在围

---

① *Werke*, 379～390.

② *Jour. für Math.*, 66, 1866, 121～160; 68, 1868, 354～385.

绕这点并伸展到邻近奇点的圆形区域内正确的解的表达式. 这样，他就建立除在某些点的邻域外都是一致、有限且连续的 n 个函数的函数系的存在性，并且当变量 z 走过绕这些点的闭回路时，这函数系就经受一个常系数的线性替换.

然后，Fuchs 考虑:形如(13)的微分方程必须具有什么性质，才能使其解在奇点 $z=a$ 处具有形状:

$$(z-a)^s[\phi_0+\phi_1\log(z-a)+\cdots+\phi_\lambda\log^\lambda(z-a)],$$

这里 s 是某个(可以进一步指明的)常数，ϕ_i 是在 $z=a$ 的邻域内单值的函数，可能有有限阶极点. 他的答案是:一个充要条件为 $p_r(z)=(z-a)^{-r}P(z)$，其中 $P(z)$在 $z=a$ 及其邻域内是解析的. 这样，$p_1(z)$有一阶极点，等等. 这样的点 a 叫做正则奇点(Fuchs 叫它为决定性的点).

Fuchs 还研究过一类形如(13)但较为特殊的方程. 这种类型的齐次线性方程，当它在扩充了的复平面(包括无穷远点∞)上在最坏的情况下只有正则奇点时，就称为是 Fuchs **型方程**. 在这种情形下，$p_i(z)$必须是 z 的有理函数. 例如，超几何方程在 $z=0$, 1, ∞处就有正则奇点.

但是对微分方程在给定点的邻域内的积分的研究不一定给出积分本身. 这种研究已作为探讨完全积分的出发点. 由于 Fuchs 作了大量研究，所以数学家们已经成功地扩大了能明显积分的线性常微分方程类. 以前仅是常系数的 n 阶线性方程和 Legendre 方程

$$(ax+b)^n\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}+A(ax+b)^{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}$$

$$+\cdots+L(ax+b)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+My=0$$

可以积分，后者要用到变换 $ax+b=\mathrm{e}^t$. 新的方程中可以积分的是那样的方程，其积分都是 z 的一致性(单值)函数. 通过微分方程的奇点的研究，人们认识到那些积分都具有这个性质. 这样得到的一

般积分通常是新的函数.

除了特殊类型微分方程的各种积分的普遍结果外,对于在 $z=a$ 点处有正则奇点的方程,它的解还有利用级数的途径. 如果原点是这样的点,那么方程必定有形式

$$z^n\frac{d^n w}{dz^n}+z^{n-1}P_1(z)\frac{d^{n-1}w}{dz^{n-1}}+\cdots+zP_{n-1}(z)\frac{dw}{dz}+P_n(z)w=0,$$

其中 $P_i(z)$在 $z=0$ 及其邻域内解析. 在这种情形下,人们可以得到 n 个基本解,用关于 $z=0$ 处的级数形式表示,并证明对 z 值的某些范围这级数收敛. 这级数有形式

$$w=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu z^{\rho+\nu}.$$

而对每个解,ρ 与 c_ν 是可以确定的. 这结果属于 Georg Frobenius (1849—1917)①.

19 世纪的后半期仍在研究 Riemann 问题,但没有成功,直到 1905 年②, Hilbert 和 Oliver D. Kellogg(1878—1932)③,借助于当时已发展了的积分方程理论才第一次给出完全解. 他们证明了产生单值群的变换可以任意地预先指定.

6. 自守函数

线性微分方程的理论尔后为 Poincaré 和 Felix Klein 所追研. 他们引进的课题叫做自守(automorphic)函数,它不但对其他各种应用是重要的,而且在微分方程理论中也扮演着主要的角色.

Henri Poincaré(1854—1912)是巴黎大学理学院(Sorbonne)

---

① *Jour. für Math.*, 76,1874, 214 ~ 235 = *Ges. Abh.*, 1,84~105.

② *Proc. Third Internat. Math. Cong.*, 1905, 233 ~ 240; 与 *Nachrichten König. Ges. der Wiss. zu Gött.*, 1905,307~388. 还有在 D. Hilbert 的 *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, 1912, Chelsea(重印), 1953,81~108.

③ *Math. Ann.*, 60,1905,424~433.

的一位教授.他的著作几乎与 Euler 和 Cauchy 一样多,包罗了数学和数学物理的广泛领域.我们没有机会讨论他的物理研究,其中包括:毛细管引力,弹性学,位势理论,流体力学,热的传播,电学,光学,电磁理论,相对论,而尤为突出的是天体力学. Poincaré 对他研究的每个问题都深刻洞察,并揭示出其本质.他敏锐地集中于一个问题,并细致地考察它.他还深深信赖于对一个问题的每个方面作定性的研究.

自守函数是圆函数、双曲函数、椭圆函数以及初等分析中其他函数的推广.函数 $\sin z$,当 z 换为 $z+2m\pi$ 时,函数值不变,这里 m 是任何整数.也可以说,当 z 受到群 $z'=z+2m\pi$ 的任何变换时,函数 $\sin z$ 的值是不变的.双曲函数 $\sinh z$,当 z 受到群 $z'=z+2\pi mi$ 中的任何变换时其值不变.椭圆函数在群 $z'=z+m\omega+m'\omega'$ 的变换下,其值保持不变,这里 ω 与 ω' 是这函数的周期.所有这些群都是不连续的(这术语是 Poincaré 引进的),就是说,在群的变换下,任何一点的所有变式的数目在任何有界区域内都是有限的.

自守函数的名称今天已用于包括那些在变换群

$$z'=\frac{az+b}{cz+d}, \tag{16}$$

或这个群的某些子群作用下不变的函数,其中 a, b, c, d 可以是实数或复数,而 $ad-bc=1$. 此外,在复平面的任何有限部分上,这群必须是不连续的.

研究得最早的自守函数是椭圆模函数,这些函数在模群或它的某些子群的作用下是不变的,所谓模群就是(16)的那样一个子群,其中 a, b, c, d 是实整数且 $ad-bc=1$. 这些椭圆模函数是从椭圆函数导出的.我们这里不再继续讨论它们,因为它们与微分方程的基本理论无关.

更一般的自守函数是为研究二阶线性微分方程

$$\frac{d^2\eta}{dz^2}+p_1\frac{d\eta}{dz}+p_2\eta=0, \tag{17}$$

而引进的,其中 p_1 和 p_2 最初是 z 的有理函数. 一个特殊情形是有 0, 1, ∞三个奇点的超几何方程

$$\frac{d^2\eta}{dz^2}+\frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)}{z(1-z)}\frac{d\eta}{dz}+\frac{\alpha\beta}{z(z-1)}\eta=0. \tag{18}$$

Riemann 在他的 1858—1859 年关于超几何级数的讲义里和 1867 年关于极小曲面的一篇遗著中,和 Schwarz① 独立地各自确立了下面所说的理论. 令 η_1 和 η_2 是方程(17)的任两个特解. 于是所有解可以表为

$$\eta=m\eta_1+n\eta_2.$$

当 z 绕奇点的一条闭路径走过一圈时,η_1 和 η_2 变成

$$\eta_1^1=a\eta_1+b\eta_2,\ \eta_2^2=c\eta_1+d\eta_2,$$

而令 z 绕所有奇点的诸闭路径旅游时,就得到这种线性变换的整个群,它就是这微分方程的单值群.

现令 $\zeta(z)=\eta_1/\eta_2$. 当 z 绕闭路径走一圈时,这个商 ζ 就变为

$$\zeta^1=\frac{a\zeta+b}{c\zeta+d}. \tag{19}$$

从(17)我们发现 ζ 满足微分方程

$$\frac{\zeta'''}{\zeta'}-\frac{3}{2}\left(\frac{\zeta''}{\zeta'}\right)=2p_2-\frac{1}{2}p_1^2-p_1'. \tag{20}$$

如果把(18)中的特殊函数取作(17)中的 p_1 和 p_2,便得到

$$\frac{\zeta'''}{\zeta'}-\frac{3}{2}\left(\frac{\zeta''}{\zeta'}\right)^2=\frac{1-\lambda^2}{2z^2}+\frac{1-\mu^2}{2(1-z)^2}-\frac{\lambda^2+\mu^2-\nu^2-1}{2z(1-z)}, \tag{21}$$

其中 $\lambda^2=1-\gamma^2$, $\mu^2=(\gamma-\alpha-\beta)^2$, $\gamma^2=(\alpha-\beta)^2$ 而 λ, μ, ν 取正数(α, β, γ 是实的). 变换类(19)就是微分方程(21)的单值群.

接着 Riemann 和 Schwarz 证明了,当 λ, μ, ν 是实数时,方程

① *Jour. für Math.*, 75,1873, 292 ~ 335 = *Ges. Abh.*, 2,211~259.

(21)的每个特解 $\zeta(z)$ 都是一个从上半 z 平面(图 29.1)到 ζ 平面上的以圆弧为边、以 $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ 为角的曲线三角形的保角变换.

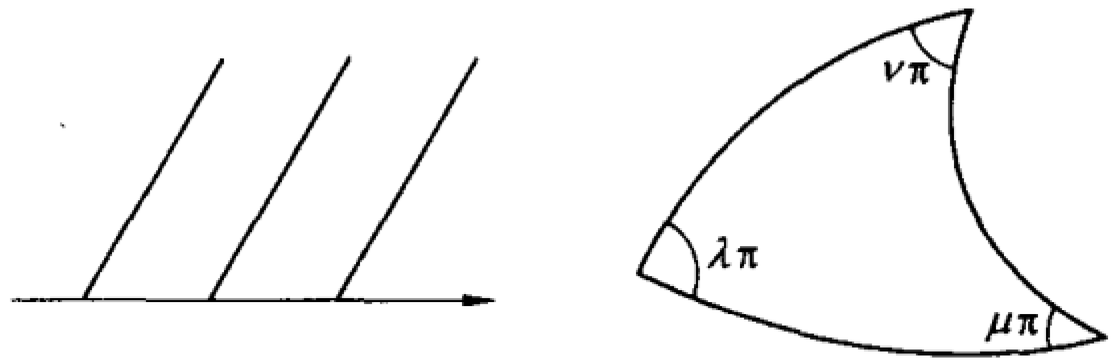


图 29.1

在区域由三圆弧围成的情形下,如果这三角形的角满足一定条件,则 $\zeta=\zeta(z)$ 的反函数就是一个自守函数 $z=\phi(\zeta)$, 它的整个存在区域是半平面或圆. 在 ζ 经线性变换(19)的群中的元素变换后,这函数保持不变,而变换(19)把上述那种形状的任一曲线三角形变到另一曲线三角形. 给定的"圆边"三角形是这个群的基本区域. 在这变换群的作用下,这个区域变成类似的三角形,它们的和覆盖了半平面或圆. 这圆边三角形是椭圆函数情形里的平行四边形的类似物.

Poincaré 和 Klein 的工作从这个基点继续前进. 1880 年以前, Klein 在自守函数方面做了一些基本的工作. 后来在 1881—1882 年期间与 Poincaré 合作. Poincaré 在受 Fuchs 上述工作的吸引而注意这事后,对这课题也已作了先行的工作. 1884 年 Poincaré 在《数学学报》的前五卷中发表了关于自守函数的五篇重要论文. 当这组论文的第一篇在《数学学报》的第一卷上发表时, Kronecker 警告编辑 Mittag Leffler 说,这篇不成熟和隐晦的论文会把这期刊扼杀掉.

以椭圆函数理论为指导, Poincaré 发明了一类新的自守函数①. 这类自守函数是考虑了方程

① *Acta. Math.*, 1,1882,1～62 与 193～294 = *Œuvres*, 2,108～168,169～257.

$$\frac{d^2\eta}{dz^2}+P(w, z)\frac{d\eta}{dz}+Q(w, z)\eta=0$$

的两个线性无关解的商的反函数而得到的，其中 w 与 z 由多项式方程 $\phi(w, z)=0$ 相连，而 P 与 Q 都是有理函数. 这是 Fuchs 型自守函数类，由在圆（叫做基本圆）内一致（单值）全纯函数组成，这圆在形如

(22) $$z'=\frac{az+b}{cz+d}$$

的线性变换类作用下是不变的，其中 a, b, c, d 是实数且 $ad-bc=1$. 这些使圆和其内部不变的变换形成一个群，叫做 Fuchs 群. Schwarz 函数 $\phi(\zeta)$ 是 Fuchs 型函数的最简单的例子. 这样，Poincaré 就证明了比椭圆模函数更为普遍的自守函数类的存在性①.

Poincaré 关于自守函数的构造（在 1882 年的第二篇论文里）是根据他的 θ 级数作出的. 设群(22)的变换是

(23) $$z'=\frac{a_iz+b_i}{c_iz+d_i},\quad a_id_i-b_ic_i=1,\ i=1, 2, \cdots$$

令 $z_1, z_2, \cdots$ 为 z 在群中的各种变换下的象. 令 $H(z)$ 是一个有理函数（撇开其他不重要的条件）. 于是 Poincaré θ 级数就是函数

(24) $$\theta(z)=\sum_{i=0}^{\infty}(c_iz+d_i)^{-2m}H(z_i),\ m>1.$$

可以证明 $\theta(z_j)=(c_jz+d_j)^{2m}\theta(z)$. 现在令 $\theta_1(z)$ 与 $\theta_2(z)$ 是具有同一 m 的两个 θ 级数. 这些级数不仅是单值函数而且是整函数. 因此

(25) $$F(z)=\frac{\theta_1(z)}{\theta_2(z)}$$

是群(23)的一个自守函数. 按照这群是属于 Fuchs 群还是 Klein 群，Poincaré 把级数(24)叫做 θ-Fuchs 级数或 θ-Klein 级数（Klein

---

① 在关于 Fuchs 型群的这一工作中，Poincaré 使用了非欧几里得几何（第 36 章），并证明了 Fuchs 型群的研究归结为 Lobatchevsky 几何的平移群的研究.

群马上就要讲到).

Fuchs 型函数有两类:一类存在于整个平面上,另一类只存在于基本圆的内部. 如我们在上面所见,Fuchs 型函数的反函数是代数系数的二阶线性微分方程的两个积分的比. 这种方程,Poincaré 称之为 Fuchs 型方程,可以用 Fuchs 型函数的方法积分出来.

后来,Poincaré① 把变换群(22)扩充到复系数的情形,并考虑了这种群的几种类型,Poincaré 把这种群叫做 Klein 群. 这里我们必须满意地注意到,如果一个群在本质上是非有限的或非 Fuchs 型的,但当然具有(22)的形状,并且在复平面的任何部分上是不连续的,那么这群便是 Klein 群. 对这些 Klein 群,Poincaré 得到了新的自守函数,即在 Klein 群变换下不变的函数,Poincaré 把它叫做 Klein 函数. 这些函数有类似于 Fuchs 型函数的性质;然而,这些新函数的基本区域比圆要复杂. 顺便说说,Klein 考虑了 Fuchs 型函数,但 Lazarus Fuchs 倒没有考虑过. Klein 因此向 Pioncaré 提过抗议. Poincaré 的回答是把自己紧接着发现的一类自守函数叫作 Klein 函数,因为这些函数是某些人默默注意到的,从来都没有被 Klein 考虑过.

后来,Poincaré 指出如何借助于 Klein 函数表示仅有正则奇点的代数系数的 n 阶线性方程的积分. 这样,整个这类线性微分方程都可以用 Poincaré 的这些新的超越函数来解了.

7. Hill 在线性方程周期解方面的工作

当自守函数的理论还正处在创立的阶段时,天文学方面的工作激起了对一个二阶常微分方程的兴趣,它比 Mathieu 方程更为

① *Acta Math.*, 3,1883,49～92;4,1884, 201 ～ 312 = *Œuvres*, 2,258～299, 300～401.

普遍一些. 因为 n 体问题不可能明显地解出,只有复杂的级数解才可用,于是数学家们转而去挑选周期解.

周期解的重要性来源于行星或卫星轨道的稳定性问题. 假如一个行星略微离开其轨道,并给它一个小的速度,那么行星是围绕其轨道振动而过了一定时间后也许又回到轨道呢,还是从此就离开轨道呢? 在前一种情形下,轨道是稳定的,而在后一种情形下,轨道是不稳定的. 这样,行星的原始运行或运行中的任何不规则性是否周期的问题乃是极其重要的问题.

如我们知道的(第21章第7节),Lagrange 在三体问题中已找到了特殊的周期解. 到第一个美国大数学家 George William Hill(1838—1914)研究月球理论之前一直没有找到三体问题新的周期解. 1877年,Hill 私人出版了关于月球近地点运动的一篇具有卓越创见性的论文①. 他在《美国数学杂志》②上又发表了一篇关于月球运动的很重要的论文. 他的工作创立了周期系数的线性齐次微分方程的数学理论.

Hill(在1877年的论文中)第一个基本思想是对月球运动的诸微分方程确定一个近似于实际观察到的运动的周期解. 于是他对这个周期解变差写出方程,这使他得到一个带周期系数的四阶线性微分方程组. 知道了某些积分后,他便能把这个四阶方程组化简为单独一个二阶线性微分方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \theta(t) x = 0, \tag{26}$$

$\theta(t)$是以 π 为周期的偶函数. 把 $\theta(t)$展开为 Fourier 级数,Hill 方程的形式就可以写成

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + x(q_0 + 2q_1 \cos 2t + 2q_2 \cos 4t + \cdots) = 0. \tag{27}$$

---

① 此文重印于 *Acta Math.*, 8,1886, 1～36 = *Coll. Math. Works* 1,243～270.

② *Amer. Jour. of Math.*, 1,1878,5～26,129～147, 245～260 = *Coll. Math. Works*, 1,284～335.

Hill 令 $\zeta = e^{it}$, $q_{-\alpha} = q_\alpha$, 并且写(27)为

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + x\sum_{-\infty}^{\infty} q_\alpha \zeta^{2\alpha} = 0. \tag{28}$$

然后他令

$$x = \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j \zeta^{\mu+2j},$$

其中 μ 与 b_j 待定. 把 x 的这个值代入(28),并令 ζ 的每个幂的系数为 0,他得到二重无穷线性方程组

$$\begin{gathered}
\cdots\cdots \\
\cdots[-2]b_{-2} - q_1 b_{-1} - q_2 b_0 - q_3 b_1 - q_4 b_2 - \cdots = 0, \\
\cdots - q_1 b_{-2} + [-1]b_{-1} - q_1 b_0 - q_2 b_1 - q_3 b_2 - \cdots = 0, \\
- q_2 b_{-2} - q_1 b_{-1} + [0]b_0 - q_1 b_1 - q_2 b_2 - \cdots = 0, \\
- q_3 b_{-2} - q_2 b_{-1} - q_1 b_0 + [1]b_1 - q_1 b_2 - \cdots = 0, \\
- q_4 b_{-2} - q_3 b_{-1} - q_2 b_0 - q_1 b_1 + [2]b_2 - \cdots = 0, \\
\cdots\cdots
\end{gathered}$$

其中

$$[j] = (\mu + 2j)^2 - q_0.$$

Hill 令未知量 b_j 的系数行列式等于 0. 他首先确定 μ 的无穷多个解的性质并给出确定 μ 的明显公式. 然后,利用 μ 的这些值,他对无穷多个 b_j 的无穷齐次线性方程组解出 b_j 与 b_0 的比值. Hill 确实证明了二阶微分方程有周期解,因而证明了月球近地点的运动是周期性的.

在 Poincaré 证明了 Hill 这种做法的收敛性,因而使无穷行列式和无穷线性方程组的理论有了根据之前①, Hill 的工作是一直受人嘲笑的. Poincaré 对 Hill 的成就的注意和完善,使 Hill 和有关课题著名了.

---

① *Bull. Soc. Math. de France*, 13, 1885, 19~27; 14, 1886, 77~90 = *Œuvres*, 5, 85~94, 95~107.

8. 非线性微分方程:定性理论

在 Hill 工作的刺激下,Poincaré 为支配行星运动以及行星和卫星轨道稳定性的微分方程的周期解的研究开辟了一条新的途径. 因为有关的方程是非线性的,所以 Poincaré 就从事于这类方程的研究. 非线性常微分方程实际上在一些课题的开创期就出现了,例如在 Riccati 方程(第 21 章第 4 节)中,在摆动方程中,在变分法的 Euler 方程(第 24 章第 2 节)中. 解非线性方程还没有找出普遍的方法.

由于运动方程,即使是三体的运动方程都不可能用已知函数明显地解出,所以稳定性问题就不可能通过考察解的性态而得到解决. 于是 Poincaré 寻找通过考察微分方程本身就可以回答问题的方法. 他把自己所创立的这个理论叫做微分方程的定性理论. 这理论表述在四篇本质上是同一标题的论文《关于由微分方程确定的曲线的报告》(Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle)[①]里. 用他自己的话说,他要寻求解答的问题是:"动点是否描出一闭曲线? 它是否永远逗留在平面某一部分的内部? 换句话说,并且用天文学的话来说,我们要问轨道是稳定的还是不稳定的?"

Poincaré 从形为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{P(x,\ y)}{Q(x,\ y)} \tag{29}$$

的非线性方程出发(其中 P, Q 对 x, y 是解析的),选择这个形式的部分原因是由于行星运动的某些问题,部分原因是由于它是 Poincaré 心目中开始研究的类型中最简单的数学类型. (29)的解

---

① *Jour. de Math.*, (3), 7, 1881, 375~422; 8, 1882, 251~296; (4), 1, 1885, 167~244; 2, 1886, 151~217 = *Œuvres*, 1, 3~84, 90~161, 167~221.

有 $f(x, y) = 0$ 的形式,而这方程就说是定义一个轨道系统.代替 $f(x, y) = 0$,可以考虑参数形式 $x = x(t)$, $y = y(t)$.

在分析方程(29)的所有可能有的解的类型时,Poincaré 发现微分方程的奇点(使 P 与 Q 同时为 0 的点)起着关键性作用.这些奇点在 Fuchs 意义下是不确定的或是不规则的.这里,Poincaré 继续 Briot 和 Bouquet(第 5 节)的早期工作,但使自己限于实值并宁可研究整个解的性质,而不只研究在奇点邻域内解的性质.他把奇点区分为四类,并阐述了解在这些点附近的性态.

第一类奇点是焦点,即图 29.2 中的原点,当 t 从 $-\infty$ 变向 $+\infty$ 时,解环绕原点盘旋并趋向于原点.这种类型的解被看成是稳定的.第二类奇点是鞍点.它是图 29.3 中的原点,轨道趋近于这个点然后又离开它.两条分角线是轨道的渐近线.这种运动是不稳定的.第三类奇点叫结点,是无穷多个解相交叉的点.第四类奇点叫中心,有若干闭轨道围绕着它,一个闭轨道包含着另一个,并且都包含着中心.

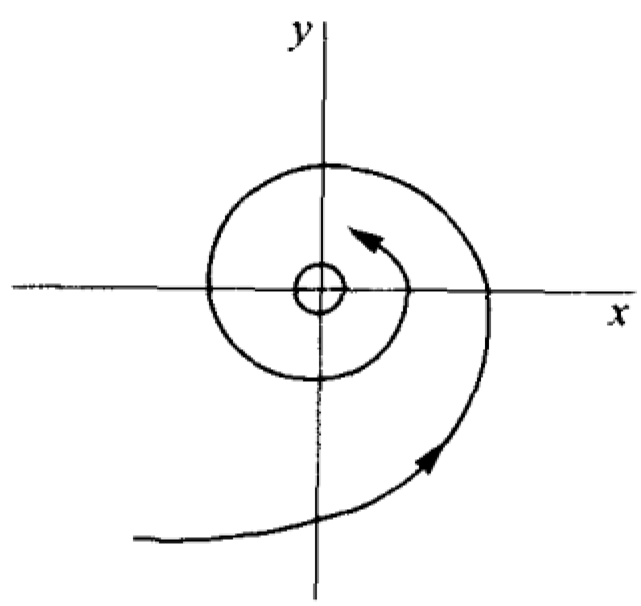


图 29.2

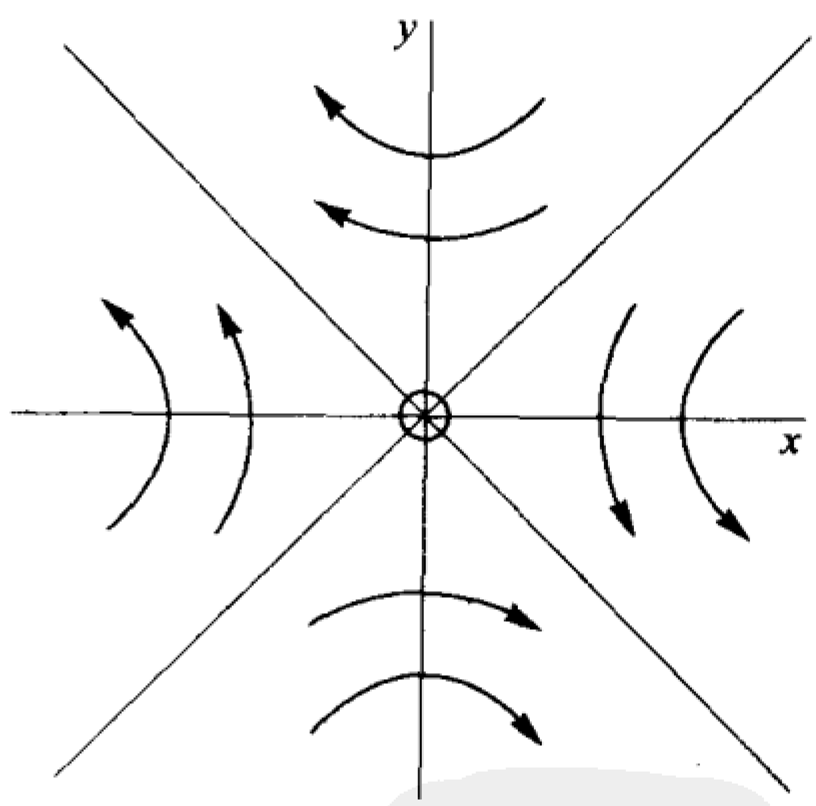


图 29.3

在许多结果中,Poincaré 发现可能有一些闭曲线不与任何满足微分方程的曲线组相接触.他把这些闭曲线叫做无接触环.一条满足微分方程的曲线与这环的交点不能多于一个.因而,如果

它跨过这环,则它就不可能再次跨过这环. 如果这种曲线是一行星的轨迹,那么它就表示不稳定的运动.

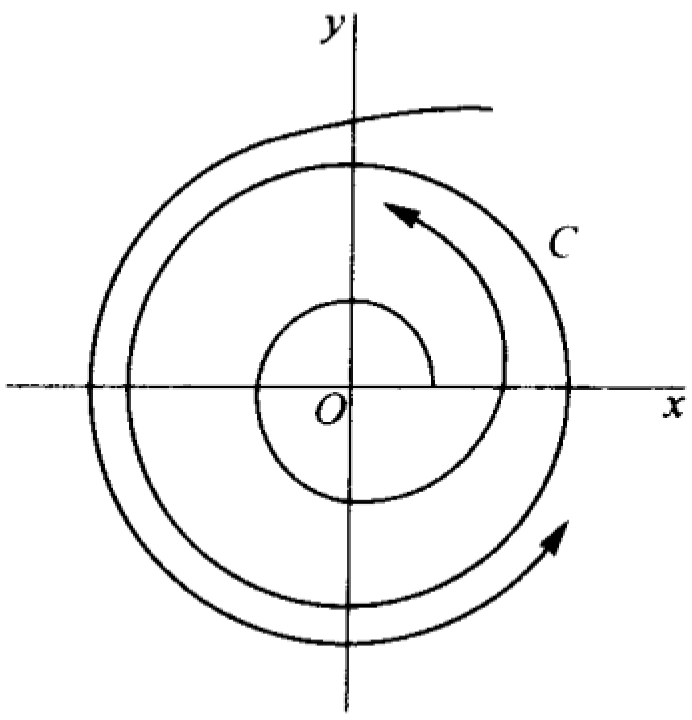


图 29.4

除了无接触环外,还有一种Poincaré 称之为极限环的闭曲线. 它们是满足这微分方程的闭曲线,而且其他解渐近地趋向于它们,也就是永远达不到极限环. 这种趋向可以是从极限环 C 之外,也可以是从极限环 C 之内(图 29.4). 对某些(29)型的微分方程,Poincaré 确定了其极限环和它们的存在区域. 在极限环的情形下,轨道曲线趋向于一条周期曲线,所以运动仍然是稳定的. 然而,如果运动方向是离开极限环的,那么在极限环外面的运动是不稳定的,而在环内的运动则是一条收缩螺线.

Poincaré 在他关于这课题的第三篇论文中,研究了高次的和具有形状 $F(x, y, y') = 0$ (其中 F 是 x, y, y' 的多项式)的一阶方程. 为了研究这些方程,把 x, y, y' 看作三直角坐标,并考虑由微分方程定义的曲面. 如果这曲面有亏格 0(球的形状),那么积分曲线有与一次微分方程情形相同的性质. 对于其他亏格,关于积分曲线的结果可以很不相同. 例如,对于一个环管就有许多新的情形发生. Poincaré 没有完成这个研究. 在(1886 年的)第四篇论文里,他研究了二阶方程,并得到了某些类似于一阶方程所具有的结果.

Poincaré 在继续进行关于微分方程(29)解的类型的工作同时,又考虑了一种针对天文学中三体问题的更普遍的理论. 在一篇得奖的论文《论三体问题和动力学方程》①中,他考虑了微分

① *Acta Math.*, 13, 1890, 1 ~ 270 = *Œuvres*, 7, 262~479.

方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = X_i(x_1, \cdots, x_n, \mu), \; i = 1, 2, \cdots, n. \tag{30}$$

他用小参数 μ 的幂展开 X_i,并假定这方程组对 $\mu = 0$ 有一个已知的以 T 为周期的周期解

$$x_i = \phi_i(t), \; i = 1, 2, \cdots, n.$$

他企图找方程组的当 $\mu = 0$ 时归化为 $\phi_i(t)$ 的周期解. 对三体问题,周期解的存在性已由 Hill 发现,而 Pioncaré 则利用了这一事实.

在这里考虑 Poincaré 工作的细节是太专门化了. 他首先推广了 Cauchy 关于常微分方程组的解的较早的工作,其中 Cauchy 已用了他的**极限计算**. 然后,Poincaré 证明了他所要寻找的周期解的存在性,并把他所学得的知识应用于三体问题周期解的研究,其中两个物体的质量(不是太阳的质量)都是很小的. 于是,经假定这两个小质量物体围绕太阳在同一平面的两个同心圆上运动后,便得到这样的解. 如果假定在 $\mu = 0$ 时轨道都是椭圆,并且它们的周期是可公度的,便可以得到其他的解. 利用这些解,并利用他对方程组所建立的理论,他便得到其他的周期解. 总结起来,他证明了有无穷多个初始位置和初始速度使得三星体**相互间的距离**是时间的周期函数(这样的解也叫作周期解).

Poincaré 在 1890 年的这篇论文中引用了关于方程组(30)的周期解和殆周期解的许多别的结论,其中包含有这种方程组的从前不知道的一类新的解这样非常卓越的发现. 他把这些解叫作渐近解. 共有两类. 在第一类中,当 t 趋于 $-\infty$ 或 t 趋于 $+\infty$ 时,这解渐近地趋于周期解. 第二类解由二重渐近解组成,也就是当 t 趋于 $-\infty$ 和 $+\infty$ 时,这种解趋于一周期解. 这种二重渐近解有无穷多个. 在 1890 年的这篇论文中所有的结果以及许多其他结果也可以

在 Poincaré 的《天体力学的新方法》(*Les Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*)①中找到.

Poincaré 关于太阳系稳定性问题的工作仅仅是部分地成功了. 稳定性仍然是一个未解决的问题. 事实上, 月球轨道是不是稳定的问题也是这样; 今天大多数科学家认为它是不稳定的.

(29)的解的稳定性可以用所谓特征方程的方法来分析, 所谓特征方程就是

$$(31)\qquad \begin{vmatrix} Q_x(x_0,\ y_0)-\lambda & P_x(x_0,\ y_0) \\ Q_y(x_0,\ y_0) & P_y(x_0,\ y_0)-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

其中$(x_0,\ y_0)$是(29)的一个奇点. 按照杰出的俄罗斯数学家 Alexander Liapounoff(1857—1918)的一个定理, 在$(x_0,\ y_0)$的邻域内稳定性依赖于这个特征方程的根②. 可能情形的分析是细致的, 并包括着比上面讨论的 Poincaré 的工作更多的类型. Liapounoff 关于稳定性问题的工作一直继续到这世纪的早期. 据 Liapounoff 说, 基本结果是当且仅当方程(31)关于 n 的根都有负实部时, 方程的所有解才是稳定的.

非线性方程的定性研究被 Poincaré 引进的拓扑论证法(在《数学杂志》上四篇论文的第一篇中)所推进. 为了描述奇点的性质, 他引进了指数的概念. 考虑一奇点 P_0 和围绕它的一条简单闭曲线 C. 在 C 与方程

$$(32)\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{P(x,\ y)}{Q(x,\ y)}$$

的解的每个交点上, 有轨道的一个方向角, 我们用 ϕ 表示, 这个角可以取从 0 到 2π 弧度间的任何值. 如果一个点依反时针方向沿 C 移动(图 29.5), 则角 ϕ 将要变化; 而且当点 C 走完一圈以后, ϕ 将有值 $2\pi I$, 其中 I 是一个整数或 0(因为轨道的方向角已经转回到

① Three volumes, 1892～1899.

② *Ann. Fac. Sci. de Toulouse*, (2), 9, 1907, 203～474; 1892 年最初在俄国发表.

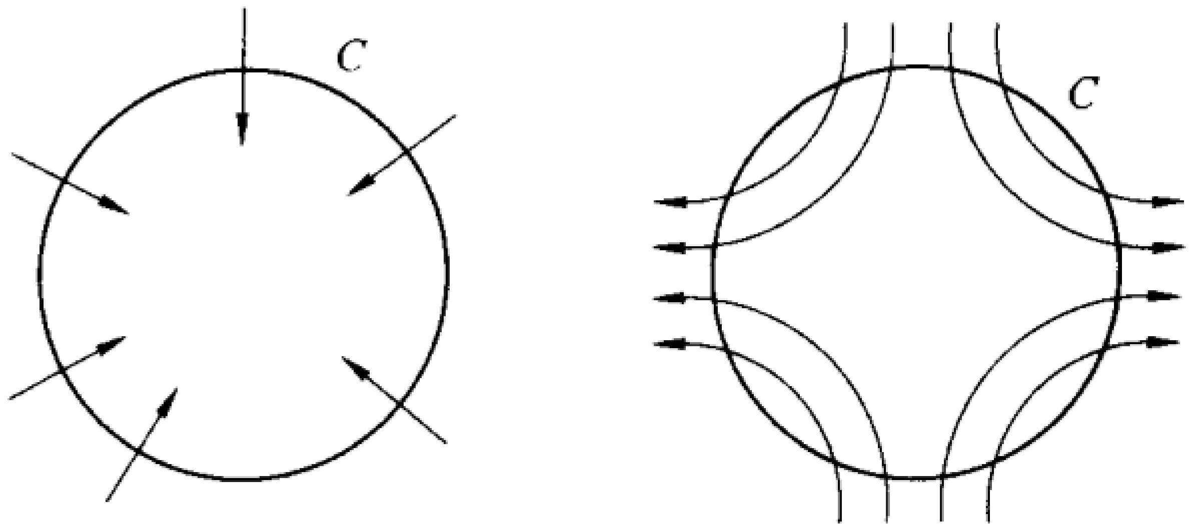


图 29.5

原来的值了). 量 I 就是曲线的指数. 可以证明:包含几个奇点的闭曲线的指数是它们的指数的代数和. 闭轨道的指数是 +1,反之亦然.

轨道的性质可以由特征方程确定,因此,一条曲线的指数 I 应当仅仅知道微分方程就能确定了. 可以证明

$$I=\frac{1}{2\pi}\int_C \mathrm{d}\left(\arctan\frac{P}{Q}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_C\frac{P\mathrm{d}Q-Q\mathrm{d}P}{P^2+Q^2},$$

其中积分路径是闭曲线 C.

Poincaré 之后,关于形为(32)的方程的解的最有意义的工作是属于 Ivar Bendixson(1861—1935)的. 他的主要结果①之一是提供一个准则,据以可证明在某区域内没有闭轨道存在. 若 D 是 $\partial Q/\partial x+\partial P/\partial y$ 在其中同号的一个区域,则方程(32)在 D 中没有周期解.

在 Bendixson 1901 年的论文里,有现在以 Poincaré 和 Bendixson 命名的定理,它提供了(32)存在一个周期解的一个肯定判断准则. 如果 P 与 Q 在 $-\infty<x,\ y<\infty$ 内有定义并且是正则的,又如果当 t 趋于∞时,解 $x(t),\ y(t)$永远保持在$(x,\ y)$平面的有界区域内且不趋于奇点,那么这微分方程至少存在一条闭的解曲线.

Poincaré 创始的非线性方程的研究已在各个方面加宽变广

① *Acta Math.*, 24, 1901, 1~88.

了. 这里要提一下在19世纪开始的又一个论题. Fuchs研究过的线性微分方程的奇点都是固定的,而且事实上是被这微分方程的系数所确定了的. 在非线性方程的情形下,奇点可能随初始条件而变动,因而称为可去奇点. 例如方程 $y'+y^2=0$ 有一般解 $y=1/(x-c)$,其中 c 是任意的. 在解中,奇点的位置依赖于 c 的值. 可去奇点的现象是由 Fuchs① 发现的. 可去奇点的研究和具有或不具有这种奇点的二阶非线性方程的研究被许多人做过,特别是被 Paul Painlevé(1863—1933)研究过. 一个有趣的特征是对许多形如 $y''=f(x,y,y')$ 的二阶方程类,它们的解需要新的超越函数类,现在叫做 Painlevé 超越函数②.

对于非线性方程的兴趣在20世纪已经变得浓烈了. 它的应用已从天文学转移到通信、服务机构、自动控制系统和电子学. 它的研究也已从定性阶段转移到定量研究的阶段了.

参考书目

Acta Mathematica, Vol. 38, 1921. This entire volume is devoted to articles on Poincaré's work by various leading mathematicians.

Bôcher, M.: "Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen", *Encyk. der Math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1899~1916, Ⅱ, A7a, 437~463.

Bôcher, M.: "Boundary Problems in One Dimension", *Internat. Cong. of Math.*, Proc., Cambridge, 1912, 1, 163~195.

Burkhardt, H.: "Entwicklungen nach oscillirenden Functionen und Integration der Differentialgleichungen der mathematischen Physik", *Jahres. der Deut. Math.-Verein.*, 10, 1908, 1~1 804.

Cauchy, A. L.: *Œuvres complètes*, (1), Vols. 4, 7, and 10, Gauthier-Villars, 1884, 1892, and 1897.

---

① *Sitzungsber. Akad. Wiss. zu Berlin*, 1884, 699 ~ 710 = *Werke*, 2, 364 ff.

② *Comp. Rend.*, 143, 1906, 1 111~1 117.

Craig, T.: "Some of the Developments in the Theory of Ordinary Differential Equations Between 1878 and 1893", *N. Y. Math. Soc. Bull.*, 2, 1893, 119～134.

Fuchs, Lazarus: *Gesammelte mathematische Werke*, 3 vols., 1904～1909, Georg Olms (reprint), 1970.

Heine, Eduard: *Handbuch der Kugelfunktionen*, 2, vols., 1878～1881, Physica Verlag (reprint), 1961.

Hilb, E.: "Lineare Differentialgleichungen im komplexen Gebiet", *Encyk. der Math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1899～1916, Ⅱ, B5.

Hilb, E.: "Nichtlineare Differentialgleichungen", *Encyk. der Math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1899～1916, Ⅱ, B6.

Hill, George W.: *Collected Mathematical Works*, 4 vols., 1905, Johnson Reprint Corp., 1965.

Klein, Felix: *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, Vol. Ⅰ, Chelsea (reprint), 1950.

Klein, Felix: *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Julius Springer, 1923, Vol. 3.

Painlevé, P.: "Le Problème moderne de l'intégration des équations différentielles", *Third Internat. Math. Cong. in Heidelberg*, 1904, 86～99, B. G. Teubner, 1905.

Painlevé, P.: "Gewöhnliche Differentialgleichungen, Existenz der Lösungen", *Encyk. der Math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1899～1916, Ⅱ, A4a.

Poincaré, Henri: *Œuvres*, 1, 2, and 5, Gauthier-Villars, 1928, 1916, and 1960.

Riemann, Bernhard: *Gesammelte mathematische Werke*, 2nd ed., 1892, Dover (reprint), 1953.

Schlesinger, L.: "Bericht über die Entwickelung der Theorie der linearen Differentialgleichungen seit 1865", *Jahres. der Deut. Math.-Verein.*, 18, 1909, 133～266.

Wangerin, A.: "Theorie der Kugelfunktionen und der verwandten Funktionen", *Encyk. der Math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1899～1916, Ⅱ, A10.

Wirtinger, W.: "Riemanns Vorlesungen über die hypergeometrische Reihe und ihre Bedeutung", *Third Internat. Math. Cong. in Heidelberg*, 1904, B. G. Teubner, 1905, 121～139.

第 30 章

19 世纪的变分法

> 虽然不允许我们看透自然界本质的秘密,从而认识现象的真实原因,但仍可能发生这样的情形:一定的虚构假设足以解释许多现象.
>
> Leonhard Euler

1. 引　　言

我们已经看到,变分法主要是由 Euler 和 Lagrange 在 18 世纪确立的. 除各类数学和物理问题外,对它的研究有一个主导的动力,即**最小作用原理**,它在 Maupertuis, Euler 和 Lagrange 手中已成了数学物理的主导原理. 19 世纪的人们继续做着最小作用方面的工作,而 19 世纪前半期对变分法最大的刺激就来自这方面. 在物理方面,其兴趣来自力学特别是天文学的问题.

2. 数学物理和变分法

Lagrange 用其最小作用原理对动力学规律的成功描述,启示着这概念应该可以应用到物理学的其他分支上去. Lagrange 对流体动力学给出了极小原理(适用于可压缩的和不可压缩的流体)①,他由此导出了关于流体动力学的 Euler 方程(第 22 章第 8 节),而且他确实自夸说,极小原理主宰了这个领域,就像它主宰着质点运动和刚体运动那样. 在 19 世纪早期,许多弹性问题也为

---

① *Misc. Taur.*, 2_2,1760/1761,196～298,pub. 1762 = *Œuvres*, 1,365～468.

Poisson, Sophie Germain, Cauchy 和其他一些人用变分法解决.弹性问题的工作还使这课题保持经常的活跃,但在这个领域内或在 Gauss 的著名力学贡献——"**最小约束原理**"(The Principle of Least Constraint)① 中,并没有主要的变分学的新数学概念引人注目.

第一个值得注意的新论点归于 Poisson. 利用 Lagrange 的广义坐标,Poisson 直接追随 Lagrange 的两遍论文,并且从Lagrange 方程(第 24 章第 5 节)

$$(1) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial V}{\partial q_i}=0,\ i=1,2,\cdots,n$$

出发②. 这里用广义坐标表示的动能 T 是 $2T=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$, V 是势能,而 T, V 与 t 无关. 他令 $L=T-V$. 当 V 仅依赖于 q_i 而不依赖于 $\dot{q}_i$ 时,就有

$$(2) \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i},$$

从而他可以把运动方程改写成

$$(3) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0,\ i=1,2,\cdots,n.$$

他还引进

$$(4) \qquad p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i},$$

因此从(3)他得到

$$(5) \qquad \dot{p}_i=\frac{\partial L}{\partial q_i},\ i=1,2,\cdots,n.$$

这些 p_i 是动量的分量,而 q_i 是位置的直角坐标. 方程(5)是走上我们将要考察的方向上的一步.

最小作用原理,在叙述上的巨大改变是由 William R. Hamilton 作出的,这一改变对变分法、常微分方程和偏微分方程都是重

① *Jour. für Math.*, 4, 1829, 232 ~ 235 = *Werke*, 5, 23~28.

② *Jour. de l'Ecole Poly.*, 8, 1809, 266~344.

要的. Hamilton 是经光学到动力学的. 他在光学上的目的是要用 Lagrange 处理力学那样的方式形成一种演绎的数学结构.

Hamilton 也是从最小作用原理出发,并要推演出一些新的原理. 然而他对这种原理的态度与 Maupertuis, Euler, Lagrange 是有深刻区别的. 在《都柏林大学评论》(*Dublin University Review*)上发表的一篇论文①中他说:"但是虽然最小作用原理已如此立足于物理学最高级定理之林,然而在宇宙经济的基地上看,当时人们普遍拒绝把它作为宇宙规律的主张,对此,拒绝恰恰在于其他理由,事实上伪装节约的数量都常常浪费地消耗着."因为在某些自然现象,甚至于最简单的现象里,作用是极大化了的,所以 Hamilton 宁愿把它说成稳定作用原理.

Hamilton 在 1824 到 1832 年间的一系列论文里建立了他的光学的数学理论,尔后把他在那里引入的概念移植到力学中去. 他写了两篇基本论文②. 其中第二篇更为著名. 在那里他引进作用积分,即动能与位能的差对时间的积分

$$S=\int_{P_1,t_1}^{P_2,t_2}(T-V)\mathrm{d}t. \tag{6}$$

虽然量 $T-V$ 是由 Poisson 引进的,但却叫做 Lagrange 函数. P_1 代表 $q_1^1, q_2^1, \cdots, q_n^1$ 而 P_2 代表 $q_1^{(2)}, q_2^{(2)}, \cdots, q_n^{(2)}$. 现在 Hamilton 推广 Euler 与 Lagrange 的原理,允许有不受限制的比较路径,只是沿这些路径的运动必须在时间 t_1 从 P_1 开始,在时间 t_2 到达 P_2. 同时能量守恒定律不必成立,而在 Euler-Lagrange 原理中,能量守恒定律是预先假定的,因而,一物体历经比较途径中任一条所需的时间不同于历经真实途径所费的时间.

Hamilton 最小作用原理断言,真实运动是使作用稳定的运动. 对于保守系统,即在力的分量可从仅是位置的函数的位能导出

① 1833, 795 ~ 826 = *Math. Papers*, 1, 311~332.

② *Phil. Trans.*, 1834, Part Ⅱ, 247~308; 1835, Part Ⅰ, 95 ~ 144 = *Math. Papers*, 2, 103~211.

的场合，$T+V=$ 常数，所以 $T-V=2T-$ 常数，从而 Hamilton 原理化归到 Lagrange 原理. 但如已经指出的，Hamilton 原理对非保守系统也是成立的. 还有，位能 V 可以是时间的函数，甚至还是速度的函数，即在广义坐标中，$V=V(q_1, \cdots, q_n, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_n, t)$.

如果令 $T-V=L$，我们把作用积分(6)写为

$$S=\int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \cdots, q_n, \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_n, t)\mathrm{d}t. \tag{7}$$

附以条件：所有比较函数 $q_i(t)$ 在 t_1 和 t_2 都必须有同一给定值，于是，问题就是要在真实的 q_i 使积分稳定的条件下来确定 q_i 为 t 的函数. 表示 S 的一级变分为 0 的条件的 Euler 方程变成齐次二阶常微分方程组，即

$$\frac{\partial L}{\partial q_k}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)=0, \ k=1, 2, \cdots, n, \tag{8}$$

而这些方程要在 $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ 内是可解的. 虽然 L 现在是一个不同的函数，但这些方程仍叫做 Lagrange 运动方程. 坐标系的选择是任意的，通常是用 Lagrange 广义坐标，这是变分原理的基本优点.

现在引进(看(4))

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}.$$

于是方程(8)变成

$$\dot{p}_i=\frac{\partial L}{\partial q_i}.$$

虽然引进 p_i 作为一组新的自变量是 Poisson 首先做的，但是仍归功于 Hamilton. 现在我们有了一组对称的微分方程

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \ \dot{p}_i=\frac{\partial L}{\partial q_i}, \ i=1, 2, \cdots, n. \tag{9}$$

这是 $2n$ 个关于 p_i 和 $\dot{p}_i$ 的一阶微分方程组. 然而这些 $\dot{p}_i$ 就是 $\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t}$.

Hamilton 在他的第二篇(1835 年)论文中，简化了这个方程组. 他引进一个新的函数 H，定义为

(10) $$H(p_i, q_i, t) = -L + \sum_{i=1}^{n} p_i q_i.$$

这个函数在物理上就是总能量,因为这个和可以证明是等于 $2T$. 从 L 到 H 的变换叫做 Legendre 变换,因为 Legendre 曾把它用在他的常微分方程研究中. H 是 p_i, q_i, t 的函数,而 $L = T - V$ 是 q_i, $\dot{q}_i$, t 的函数,这是因为 $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, 所以我们可以解出 $\dot{q}_i$,并代到 L 中去.

利用(10),可以证明运动的微分方程(9)具有形式

(11) $$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

在应用于物理问题中时,函数 H 假定是已知的. 这些方程是 $2n$ 个一阶常微分方程的方程组,有 $2n$ 个应变量 p_i 和 q_i,它们都是 t 的函数,而 Lagrange 方程(1)是 $q_i(t)$的 n 个二阶常微分方程的方程组. 后来 Jacobi 把 Hamilton 方程称为典型微分方程. 它们是积分

$$S = \int_{P_1, t_1}^{P_2, t_2} (T - V)\mathrm{d}t = \int L\mathrm{d}t = \int \left\{ \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H(p_i, q_i, t) \right\} \mathrm{d}t$$

的变分方程(Euler 方程). 这组方程出现在 Lagrange 1809 年的一篇研究力学系统机动理论的论文中. 然而,Lagrange 没有看出这些方程与运动方程的基本联系,而 Cauchy 在 1831 年的一篇未发表的论文中则看出来了. Hamilton 在 1835 年把这些方程作为他的力学研究的基础.

为了运用 Hamilton 的运动方程,常常可能采用合适的 p 和 q 坐标系来表示 H,使得可以从方程组(11)解出 p_i 与 q_i 作为 t 的函数. 特别地,如果能选取坐标使得 H 只依赖于 p_i,那么这方程组就是可解的.

Jacobi 在 1837 年的一篇论文①中以及在 1842 年和 1843 年关

---

① *Jour. für Math.*, 17, 1837, 97 ~ 162 = *Ges. Werke*, 4, 57~127.

于动力学的讲演里(这讲演1866年刊于经典著作《动力学讲义》(*Vorlesungen über Dynamik*)中)都指出,人们可以把Hamilton的程序反转过来.在Hamilton的理论中,如果知道作用S或Hamilton函数H,就可以作出$2n$个典型微分方程并可试图解出这方程组.Jacobi的思想是图谋找出坐标P_i和Q_i以使H尽可能简单,因而微分方程(11)能易于积分.特别地,他找到一个变换

(12)
$$Q_j = Q_j(p_i, q_i, t),$$
$$P_j = P_j(p_i, q_i, t),$$

使得
$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i - H(p_i, q_i, t)\right)dt = 0$$

经变换(12)变到

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{i=1}^{n} P_i\dot{Q}_i - K(P_i, Q_i, t)\right)dt = 0,$$

从而Hamilton微分方程变成

(13)
$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i},\ \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i},$$

其中$K(P_i, Q_i, t)$是新的Hamilton算子.这一途径导致

$$K = H(p_i, q_i, t) + \frac{\partial \Omega}{\partial t}(Q_i, q_i, t),$$

其中Ω是新的函数,叫做变换的母函数.Jacobi选取$K=0$,从而由(13)得到

$$\dot{Q}_i = 0,\ \dot{P}_i = 0,$$

也就是说Q_i,P_i是常数.此外,有

(14)
$$H + \frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0,$$

并可证明
$$p_i = \frac{\partial \Omega}{\partial q_i}.$$

考虑到H中的变量,就可由(14)得到

(15)
$$H\left(\frac{\partial \Omega}{\partial q_i}, q_i, t\right) + \frac{\partial \Omega}{\partial t}(Q_i, q_i, t) = 0.$$

因为$\dot{Q}_i = 0$, $Q_i = \alpha_i$,所以这方程是关于Ω(具自变量q_i和t)的

一阶方程.作这样的改变后,方程(15)便是关于 Ω 的 Hamilton-Jacobi偏微分方程.如果这个方程可以解出一个完全的 Ω,即包含 n 个任意常数的解,那么这解将有形式

$$\Omega(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, q_1, q_2, \cdots, q_n, t).$$

现在从 Jacobi 变换理论有这样一个事实:

$$P_i = -\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_i}.$$

并且因为 $\dot{P}_i = 0$, 有 $P_i = \beta_i$ 是常数.所以从代数方程

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_i} = -\beta_i, \ i = 1, 2, \cdots, n$$

解出 q_i,这些解

$$q_i = f_i(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n, t), \ i = 1, 2, \cdots, n$$

是 Hamilton 典型方程的解.这样,Jacobi 便证明了经过解偏微分方程(15)就可以解出方程组(11).Jacobi 本人就对许多力学问题找出了真正解 Ω.

Hamilton 的工作是提供一个普遍原理(可以从它导出各种力学问题的运动定律)的一系列努力的顶峰,它鼓舞人们努力在其他数学物理分支,如弹性学、电磁理论、相对论、量子理论中求得相似的变分原理.已经导出的原理,即使是 Hamilton 原理,都不必是解特殊问题的更实际途径.虽然科学家们不再推断说极大极小原理的存在是上帝的智慧和效能的证据了,但是这种广泛的公式的吸引力,毋宁说是在于哲学和美学的兴趣.

从数学史的角度看,Hamilton 和 Jacobi 的工作是有意义的,因为它不仅推动了变分法的进一步研究,而且也推动了常微分方程组和一阶偏微分方程组的进一步研究.

3. 变分法本身的数学扩充

我们记得,即使在最简单的情形,要把积分

$$J = \int_a^b f(x, y, y')\mathrm{d}x \tag{16}$$

极小化或极大化，Euler 和 Legendre 的结果也只提供了必要条件（第 24 章）. 在 Legendre 的工作以后大约 50 年的期间内，数学家们进一步探索了一阶和二阶变分，但没有得到决定性的结果. 1837 年[①]，Jacobi 发现了如何强化 Legendre 条件使它可以提供充分条件. 在这方面，他的主要发现是共轭点的概念. 我们先来解释一下这是什么意思.

考虑满足 Euler(特征)方程的曲线；这种曲线叫极值曲线. 对于变分学的基本问题，通过给定点 A，存在一族单参数极值曲线. 现在假定 A 是我们寻求极大或极小曲线的两端点之一. 给了任一极值曲线，当其他极值曲线越来越接近这极值曲线时，其他极值曲线的交点的极限就是这极值曲线上 A 的共轭点. 表达这概念的另一方法是，我们有一族曲线，这族曲线可能有一包络. 任一极值曲线与这族曲线的包络的接触点就是这极值曲线上与 A 共轭的点. 于是 Jacobi 条件就是：如果 $y(x)$ 是原来问题中端点 A 和 B 之间的一条极值曲线，那么在 A, B 间的极值曲线 $y(x)$ 上必定没有共轭点，或甚至于连 B 本身也不是.

这在具体问题中究竟是什么意思，可以从一个例子看出来. 可以证明，从 A 点以相同速度 v 但以不同的倾角发射的炮弹，其所有轨线的抛物路径（图 30.1）是使作用积分

$$\frac{m}{2}\int_A^B v\,\mathrm{d}s$$

极小化或极大化的问题的极值曲线. 把 A, B 两点之间的作用极小化的问题，一般确实有两个解，即抛物线 $AA''B$ 与抛物线 ABA'. 还有，通过 A 点的抛物线族有一包络，它在 A'' 和 A' 点与两抛物线相切触. 在 $AA''B$ 上的共轭点是 A''，在 ABA' 上的共轭点是

---

① *Jour. für Math.*, 17, 1837, 68 ～ 82 = *Ges. Werke*, 4, 39～55.

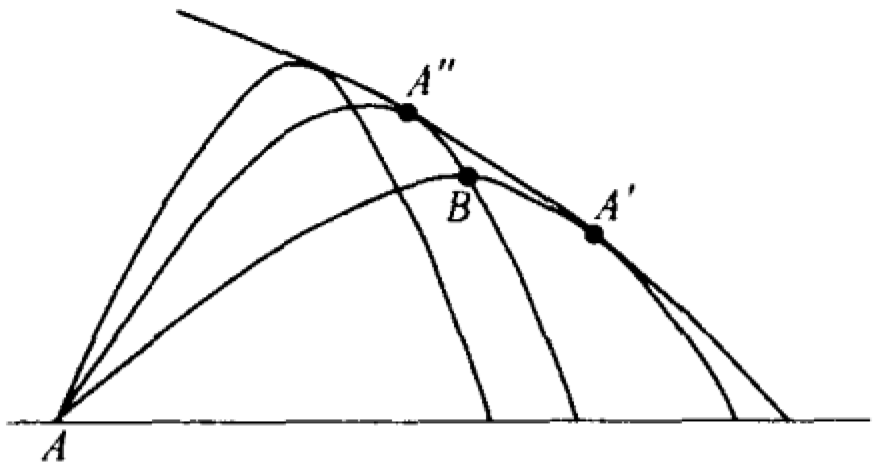


图 30.1

A'. 按照 Jacobi 条件,极值曲线 $AA''B$ 不能提供一个极大或极小,但极值曲线 ABA' 可以提供.

Jacobi 重新考虑了二级变分 $\delta^2 J$(第24章第4节). 如果以 $y+\varepsilon t(x)$ 代替 Lagrange 的 $y+\delta y$, 又如果 a 与 b 是 A 与 B 的横坐标,那么

$$(17)\qquad \delta^2 J=\frac{\varepsilon^2}{2}\int_a^b (t^2 f_{yy}+2tt' f_{yy'}+t'^2 f_{y'y'})\,\mathrm{d}x.$$

Jacobi 证明了

$$\delta^2 J=\frac{\varepsilon^2}{2}\int_a^b f_{y'y'}\left(t'-t\frac{u'}{u}\right)^2 \mathrm{d}x,$$

其中 u 是 Jacobi 辅助方程

$$(18)\qquad \left\{f_{yy}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_{yy'}\right\}u-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f_{y'y'}u')=0$$

的解,其中偏导数是沿联结两端点 A 与 B 的一条极值曲线计值的. 现在 $u(x)$ 被要求通过 A 点. 于是在通过 A 和 B 的极值曲线 $y(x)$ 上,使 $u(x)$ 取零值的所有点都是这极值曲线上共轭于 A 的点. 如果 $u=\beta_1 u_1+\beta_2 u_2$ 是辅助方程(18)的通解,那么可以证明

$$\frac{u_1(x)}{u_2(x)}=\frac{u_1(a)}{u_2(a)}$$

是所有与 A 共轭的点的横坐标的方程,其中 a 是点 A 的横坐标.

Jacobi 还指出,不必去解辅助方程. 因为在随便什么情况下,总要解 Euler 方程,设 $y=y(x,c_1,c_2)$ 是这方程的通解,即极值曲线族. 那么 u_1 可以取为 $\frac{\partial y}{\partial c_1}$,而 u_2 可取为 $\frac{\partial y}{\partial c_2}$.

Jacobi 从他关于共轭点的研究引出两条结论. 第一是：如果沿从 A 到 B 的极值曲线有一个共轭于 A 的点，那么极大或极小便是不可能的. 在这一结论上，Jacobi 基本上是正确的. Jacobi 根据他关于共轭点的考虑还作出结论说，一条在 A 与 B 之间取得极值的曲线(Euler 方程的解)，如果沿这曲线 $f_{y'y'}>0$ 并且在 A 与 B 间(或在 B 点上)不存在共轭点，那么这极值曲线便给出原积分的一个极小. 他断言，对于 $f_{y'y'}<0$，相应的命题对极大成立. 实际上，我们马上就会看到，这些充分条件是不正确的. 在这篇 1807 年的论文中，Jacobi 叙述了结果并给出了证明的简单指示. 正确命题的完全证明由后继的研究者补出来了.

Jacobi 的结果除了对极大化或极小化函数的存在性有特殊价值外，他的工作使人们清楚地看到，变分学的进展不能以通常微积分的极大和极小理论为指导.

把 Jacobi 的两条结论当作正确的接受下来有 35 年之久. 在这时期内关于这课题的论文在陈述方面是不确切的，在证明方面是有问题的. 问题没有严明简洁地陈述，因而造成各种错误. 后来，Weierstrass 从事于变分学的研究工作. 他的资料表述于 1872 年在柏林的讲义里，但是他本人没有发表出来，像 Weierstrass 在其他领域里的工作那样，他的思想引起了新的兴趣，在这课题内激起了更大的动力，并锐化了思维.

Weierstrass 的第一个论点是：迄今为止所建立的极大或极小判别准则——Euler 的、Legendre 的、Jacobi 的——都是有局限的，因为假设中的极大或极小曲线 $y(x)$ 是与别的曲线 $y(x)+\varepsilon t(x)$ 相比较的，在这里实际上是假定 $\varepsilon t(x)$ 和 $\varepsilon t'(x)$ 两者，或 Lagrange 所说的 δy 和 $\delta y'$ 两者，沿 x 域从 A 到 B 都是很小的. 也就是说，$y(x)$ 是与其他有限制的曲线类相比较的，并且在满足这三个判别准则的条件下，它确实比这些比较曲线中任何别的一条要好. Adolf Kneser(1862—1930)把这种变分叫做弱变分. 然而为了

找出真正极小化或极大化积分 J 的曲线，人们必须把它与所有其他联结 A 与 B 的曲线相比较，在这些比较曲线中，包括着那些在距离上越益接近极大曲线时，其导数可能不趋近极大(或极小)曲线的导数的比较曲线. 例如比较曲线在沿 x 域从 A 到 B 途中可能在一处或多处有尖角(图 30.2). Weierstrass 想像中的比较曲线就是 Kneser 所说的强变分.



图 30.2

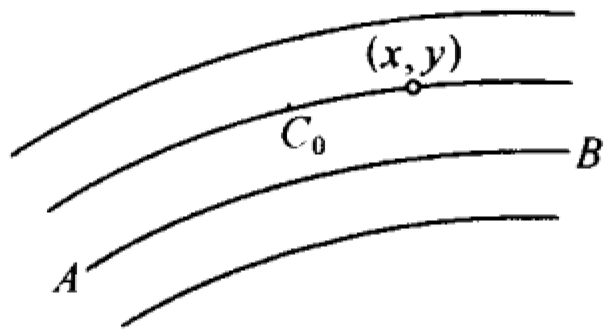


图 30.3

Weierstrass 在 1879 年确实证明了弱变分的三个条件：曲线是极值曲线(Euler 方程的解)，沿极值曲线 $f_{y'y'} > 0$，任何与 A 共轭的点必定位于 B 点之外，这三个条件确实是极值曲线给出积分 J 一个极小值(对极大值是 $f_{y'y'} < 0$)的充分条件.

然后，Weierstrass 考虑了强变分. 对这些变分，首先引进了第四个必要条件. 他引进一个新的函数，定义为

$$(19)\qquad E(x, y, y', \tilde{p}) = f(x, y, \tilde{p}) - f(x, y, y') - (\tilde{p} - y')f_{y'}(x, y, y'),$$

叫做 E 函数，或过剩函数. 他的结果是，$y(x)$提供一个极小值的第四个必要条件是：对每个有限值 $\tilde{p}$，沿极值曲线 $y(x)$上有 $E(x, y, y', \tilde{p}) \geqslant 0$. 对极小值是 $E \leqslant 0$.

后来(1879 年)Weierstrass 把他的注意力转向允许强变分时极大值(或极小值)的充分条件. 为了简明地陈述他的充分条件，有必要引进 Weierstrass 关于场的概念. 考虑极值曲线的任一单参数族 $y = \Phi(x, \gamma)$ (图 30.3)，其中包括联结 A 与 B 的特殊极值曲线，不妨说它是 $\gamma = \gamma_0$ 的那一条. 关于这族极值曲线，除了

$\Phi(x, \gamma)$的连续性和可微性的某些细节外，本质性的事实是：在过 A 和 B 的极值曲线附近的一个区域内，极值曲线族中有一条且仅有一条通过这区域内的任何一点(x, y). 满足这个本质性条件的极值曲线族就叫做场.

给了一个环绕联 A 和 B 的极值曲线 C_0 的一个场(图 30.4)，如果在 $x=a$ 和 $x=b$ 间的任何点(x, y)上以及这个场所覆盖的区域内有 $E(x, y, p(x, y), \tilde{p}) \geqslant 0$，其中 $p(x, y)$表示通过(x, y)的极值曲线在(x, y)处的斜率，$\tilde{p}$ 是任一有限值，那么相对于这场内联结 A 和 B 的任何其他 C 来说，C_0 使得积分 J 极小化.（对极大值来说，要 $E \leqslant 0$.）

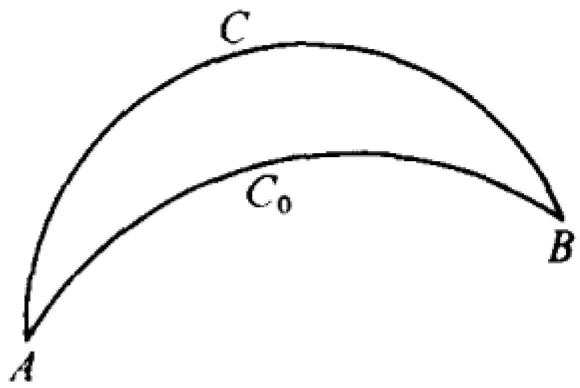


图 30.4

1900 年 Hilbert① 提出了他的不变积分理论，这个理论大大简化了充分性的证明. Hilbert 提出了一个问题：是否可能确定函数 $p(x, y)$，使得积分

$$(20)\qquad I=\int_{x_1}^{x_2}\{f(x, y, p)-(y'-p)f_{y'}(x, y, p)\}\,\mathrm{d}x$$

在(x, y)的区域中与积分路径无关？他发现，如果 $p(x, y)$是这样确定的话，那么微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p(x, y)$$

的解是一个场的极值曲线. 反之，如果 $p(x, y)$是场 F 的斜率函数，则在 F 中 I 与路径无关. 从这个定理出发，Hilbert 导出了 Weierstrass 关于强变分的充分性条件.

① *Nachrichten König. Ges. der Wiss. zu Gött.*, 1900, 291～296 = *Ges. Abh.*, 3, 323～329. 在 *Amer. Math. Soc. Bull.*, 8, 1902, 472～478 上有一个由 Mary Winston Newsom 翻译的英译本. 这个材料是 1900 年 Hilbert 的著名论文《数学问题》(Mathematical Problems)的一部分.

4. 变分法中的有关问题

我们对变分法历史的说明主要集中于积分

$$J=\int_{x_1}^{x_2} f(x,\ y,\ y')\mathrm{d}x.$$

还提到过一些其他问题，如等周问题、单个变量几个函数的问题(例如在最小作用原理中出现的问题)，以及重积分的情形，这个情形 Lagrange 首先论述过，而且在极小曲面问题中就出现过(第 24 章第 4 节). 有许多种与变分法有关的问题，诸如以参数表示 $x=x(t)$ 和 $y=y(t)$ 来处理的极小化或极大化曲线——Weierstrass 详尽地讨论了这个问题——以及主要在动力学中的一些问题，其中出现在被积函数中的变量受一些辅助方程的限制，这些辅助方程称为约束. 最后这类问题多少也与等周问题有关，因为在等周问题中也规定了一个辅助条件，即规定了围出最大面积的曲线的长度(虽然在等周问题中辅助条件是以表示曲线长度的积分这种形式出现的)，而在动力约束的情形，一个或一组约束条件的形式是包含自变量和应变量甚至包含应变量的微分的方程. 还有一个早就讨论过的重要问题叫做 Dirichlet 问题(第 28 章第 4 节和第 8 节).

我们将不去追溯这些问题的详细历史，因为尽管这些问题是有意义的而且到如今已经做了相当多的工作，但是没有一个数学发展的重要特征是出自这些问题的. 也许值得提一下的是极小曲面的课题，这个问题要求解方程

$$(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0.$$

从 1817 年 Ampère 的一篇论文以后，直到比利时物理学家 Joseph Plateau(1801—1883)在 1873 年写的一本书《遵从单一分子模型的流体静力学实验与理论》(*Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules formes moléculaires*)为止，关于极

小曲面问题的研究一直是不活跃的. Joseph Plateau 在他的书中指出,如果人们把具有闭曲线形状的金属丝浸到甘油溶液(或肥皂水)中,然后把金属丝取出来,那么具有最小面积的曲面形状的肥皂薄膜就张成金属丝边界. 于是,为了研究由一条空间闭曲线所围的极小曲面问题,数学家们接受了一种新的刺激. 因为边界曲线或曲线组可以非常复杂,极小曲面问题真正的显式解析解也许是不可能得到的. 这个问题现在被称为 Plateau 问题,导致关于至少是解的存在性证明的研究,由此可以导出解的某些性质.

参 考 书 目

Dresden, Arnold: "Some Recent Work in the Calculus of Variations," *Amer. Math. Soc. Bull.*, 32, 1926, 475～521.

Duren, W. L., Jr.: "The Development of Sufficient Conditions in the Calculus of Variations," *University of Chicago Contributions to the Calculus of Variations*, Ⅰ, 1930, 245～349, University of Chicago Press, 1931.

Hamilton, W. R.: *The Mathematical Papers*, 3 vols., Cambridge University Press, 1931, 1940 and 1967.

Jacobi, C. G. J.: *Gesammelte Werke*, G. Reimer, 1886 and 1891, Chelsea (reprint), 1968, Vols. 4 and 7.

Jacobi, C. G. J.: *Vorlesungen über Dynamik* (1866), Chelsea (reprint), 1968. Also in Vol. 8 of Jacobi's *Gesammelte Werke*.

McShane, E. J.: "Recent Developments in the Calculus of Variations," *Amer. Math. Soc. Semicentennial Publications*, Ⅱ, 1938, 69～97.

Porter, Thomas Isaac: "A History of the Classical Isoperimetric Problem," *University of Chicago Contributions to the Calculus of Variations*, Ⅱ, 475～517, University of Chicago Press, 1933.

Prange, Georg: "Die allgemeinen Integrationsmethoden der analytischen Mechanik," *Encyk. der Math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1904～1935, Ⅳ, 2, 509～804.

Todhunter, Isaac: *A History of the Calculus of Variations in the Nineteenth Century*, Chelsea (reprint), 1962.

Weierstrass, Karl: *Werke*, Akademische Verlagsgesellschaft, 1927, Vol. 7.

第 31 章

Galois 理论

> 最有价值的科学书籍是作者在书中明白地指出了他所不明白的东西的那些书，遗憾地，这还很少被人们所认识；作者由于掩盖难点，大多害了他的读者.
>
> Evariste Galois

1. 引　　言

求解多项式方程，这个代数的基本问题，继续占据着 19 世纪前期代数舞台的中心. 这期间，哪些方程可用代数运算求解，这个重要问题由 Galois 明确而透彻地回答了. 然而，他不仅创立了代数理论的头等意义的表达清楚的主体，而且引进了新概念，这些新概念被发展成其他有广泛应用的代数理论. 特别地，在他和 Abel 的著作中出现了群和域的概念.

2. 二 项 方 程

我们已经讨论过(第 25 章第 2 节)Euler, Vandermonde, Lagrange 和 Ruffini 为了代数地求解四次以上的方程和二项方程 $x^n-1=0$ 所作的无效的努力. 一个重要的成就是由 Gauss 完成的. 在他的《算术研究》[①]的最后一节，Gauss 考察了方程

$$x^p-1=0, \tag{1}$$

① 1801, *Werke*, I.

这里 p 是素数①. 这个方程通常称为分圆方程或对圆进行分割的方程. 上面的术语参考了下述事实:由 de Moivre 定理,这个方程的根是

$$x_k = \cos k\frac{2\pi\theta}{p} + i\sin k\frac{2\pi\theta}{p},\ k = 1,\ 2,\ \cdots,\ p, \tag{2}$$

而这些复数 x_k 当几何地作出图像时就是单位圆上的正 p 边形的顶点.

Gauss 证明了,这个方程的根可用一个方程序列

$$Z_1 = 0,\ Z_2 = 0,\ \cdots \tag{3}$$

的根有理地表示出来,这些方程的系数是这序列中前面的方程的根的有理函数. (3)中方程的次数正好是 $p-1$ 的素因子. 对每个因子,即使是重复的因子,有一个 Z_i. 而每个 $Z_i = 0$ 都能用根式解出,于是方程(1)也能同样解出.

这个结果对于代数地求解一般的 n 次方程的问题当然具有重要的意义,它表明了某些高次方程能用根式解出,例如,设 5 是 $p-1$ 的一个因子,则有一个五次方程,或设 7 是 $p-1$ 的一个因子,则有一个七次方程能用根式解出.

这结果对作正 p 边形的几何问题也具有重要性. 如 $p-1$ 没有异于 2 的因子,则正 p 边形可用直尺和圆规作出,因为(3)中每个方程的次数都是 2,而它的每个根都可通过它的系数作出. 这样我们就能够作出边数为素数 p 而 $p-1$ 是 2 的方幂的全部正多边形. 这样的素数是 3, 5, 17, 257, 65537, …. 换个说法,如 p 是 $2^{2^h}+1$ 形式的素数②,正 p 边形就能作出. Gauss 评论说(Art. 365),虽然 3, 5, 15 边的正多边形以及从它们直接得出的那些——如 2^n, $2^n\cdot 3$, $2^n\cdot 5$, $2^n\cdot 15$(这里 n 是正整数)的正多

---

① p 素数的情况满足 $x^n-1=0$ 的需要,因为若 $n=pq$, 令 $y=x^q$, 而 $y^p-1=0$ 是可解的,因此 $x^q=$ 常数. 当 q 是素数时可解,如 q 不是素数,可按分解 n 的相同方式来分解 q.

② 在形为 $2^\mu+1$ 的素数中,μ 一定是 2^h 的形状,但 $2^{2^h}+1$ 不一定是素数.

边形的几何作图在 Euclid 时期就已知道了,但在 2000 年的期间里,没有发现新的可作图的正多边形,而且几何学家们曾一致声称没有别的正多边形能够作得出来.

Gauss 料想到他的结果可能导致寻找新的可作图的边数为素数的正多边形的种种努力.于是他警告说:"每当 $p-1$ 包含 2 以外的素数因子,我们就得到高次方程,就是说,如 3 是 $p-1$ 的一次或多次因子,就得到一个或多个三次方程.如 $p-1$ 能被 5 除尽,就得到一个五次方程,等等.而且我们能完全严密地证明这种高次方程不能避免或不能使得它们依赖于低次方程;虽然这项工作的限制不允许我们在这里给出证明,但我们还是认为注意这个事实是必要的,这是为了使人们除了由我们的理论所给出的那些多边形以外不要去寻找别的(边数为素数的)多边形的作图,例如 7, 11, 13, 19 边的多边形,白白耗费他的时间."

然后,Gauss 考虑任何 n 边多边形(Art. 366)并且断言,一个正 n 边形是可作图的,当且仅当 $n = 2^l p_1 p_2 \cdots p_n$,这里 p_1, p_2, …, p_n 是形为 $2^{2^h}+1$ 的不同素数,而 l 是任意正整数或 0.这个条件的充分性确实容易从 Gauss 关于边数为素数的多边形的工作得出,但是必要性却一点也不显然,并且没有被 Gauss 证明①.

从 1796 年起,Gauss 就对正多边形的作图发生兴趣,那时他就构思 17 边形可以作图的第一个证明.关于这个发现有一段值得重述的故事.这个作图问题早已是著名的问题了.一天,Gauss 带着这个多边形可作图的证明到格丁根大学他的教授 A. G. Kästner 那儿去,Kästner 不相信,并企图赶走 Gauss,很像今天的大学教师们赶走三等分角的人一样.Kästner 不愿花时间检查 Gauss 的证明,并想从中寻找假定上的错误,他告诉 Gauss,这个

---

① 看 James Pierpont, "On an Undemonstrated Theorem of the *Disquisitiones Arithmeticae*", *Amer. Math. Soc. Bull.*, 2,1895~1896,77~83.这篇文章给了证明.Gauss 条件是必要的这个事实首先是由 Pierre L. Wantzel (1814—1848)所证明,见 *Jour. de Math.*, 2,1837,366~372.

作图法是不重要的，因为实际的作图法是熟知的. 当然 Kästner 知道实际的或近似的作图法的存在是与理论问题不相干的. Gauss 为了使 Kästner 对他的作图法感兴趣，就指出他曾经解出了一个 17 次的代数方程. Kästner 回答说这是不可能的. 但 Gauss 答辩说，他把这个问题化简成解一个低次的方程. Kästner 嘲笑说："噢，好，我已经这样做了."因 Kästner 也炫耀过他自己的诗集，Gauss 后来就用赞美 Kästner 是数学家中最好的诗人和诗人中最好的数学家的话作为回敬.

3. Abel 关于用根式解方程的工作

Abel 读了 Lagrange 和 Gauss 关于方程论的著作，当他还是中学学生时，就按 Gauss 对二项方程的处理方法着手探讨高次方程可解性的问题. 起初，Abel 以为他已经解决了用根式解一般的五次方程的问题，但是很快就认识到他的错误，后来，他就试图证明这样一个解答是不可能的(1824—1826). 首先他成功地证明了下述定理：可用根式求解的方程的根能以这样的形式给出，出现在根的表达式中的每个根式都可表成方程的根和某些单位根的有理函数. 然后 Abel 用这个定理证明了[①]高于四次的一般方程用根式求解的不可能性.

由于不知道 Ruffini 的工作(第 25 章第 2 节)，Abel 的证明是迂回而又不必要地复杂. 他的文章在函数分类中还有一个错误，幸亏这个错误对论证不是本质性的. 后来他发表了两个更精心的证明. 一个简单、直接而又严密的证明是 1879 年由 Kronecker 根据 Abel 的思想作出的[②].

① *Jour. für Math.*, 1, 1826, 65～84 = *Œuvres*, 1, 66～94.

② *Monatsber. Berliner Akad.*, 1879, 205～229 = *Werke*, 4, 73～96. Kronecker 的证明由 James Pierpoint 作了说明，见"On the Ruffini-Abelian Theorem", *Amer. Math. Soc. Bull.*, 2, 1895～1896, 200～221.

这样,高于四次的一般方程的求解问题由 Abel 解决了. 他还考虑了一些特殊的方程. 他做了①分割双纽线的问题(解 $x^n - 1 = 0$ 等价于分一个圆成 n 个等弧的问题),并且得出一类代数方程,现在叫 Abel 方程,它们是能用根式求解的. 分圆方程(1)是 Abel 方程的一例. 更一般地说,如果一个方程的全部根都是其中一个根的有理函数,就是说,若全部根为 x_1, $\theta_1(x_1)$, $\theta_2(x_1)$, $\cdots$, $\theta_{n-1}(x_1)$,其中 θ_i 是有理函数,这样的方程就称为 Abel 方程. 还有条件:对 α, β 的从 1 到 $n-1$ 的全部值, $\theta_\alpha(\theta_\beta(x_1)) = \theta_\beta(\theta_\alpha(x_1))$.

在最后的这一工作中,他引进了两个概念(虽然没有术语),即域和在给定域中不可约的多项式. 同后来 Galois 一样,他所说的数域是指这样的数集,这个数集中的任何两个数的和、差、积、商(除去用零作除数外)仍在集合中. 例如有理数、实数和复数都形成域. 一个多项式称为在一个域中(通常它的系数属于此域)是可约的,如果它能表成低次的,系数在此域中的两个多项式的乘积. 如果这个多项式不能这样表出,就称为不可约的.

Abel 然后着手探讨刻画能用根式求解的全部方程的特性的问题,并在 1829 年他临死以前,把一些结果通知了 Crelle 和 Legendre.

4. Galois 的可解性理论

在 Abel 的工作之后,情况是这样:虽然高于四次的一般方程不能用根式求解,但仍有很多特殊的方程,如二项方程 $x^p = a$ (p 为素数)和 Abel 方程都可用根式求解. 现在的任务是确定哪些方程可用根式求解. 刚刚由 Abel 开始的这个任务由 Evariste Galois (1811—1832)担当起来了. 由于出身富裕并有受过教育的双亲,他在 15 岁时就进入巴黎的一所有名的公立中学,并开始研究数学.

---

① *Jour. für Math.*, 4, 1829, 131 ~ 156 = *Œuvres*, 1, 478~507.

这个学科成了他的爱好，他仔细研究了 Lagrange，Gauss，Cauchy 和 Abel 的著作，别的学科他都忽视了. Galois 曾想进多科工艺学校，但可能由于在考场上口头回答问题失误，或考试的教授不了解他，两次尝试都遭落选，因此他进了预备学校(这个名字是对正规学校讲的，那时是一所低等的学校). 1830 年革命时，革命把 Charles X 从王位上赶走，而任命了 Louis Philippe. Galois 公开批评他那所学校的学监对革命不支持而被开除. 他两次因为政治罪而被捕，在狱中度过了他的半生和最后一年的大部分时间，并在 1832 年 5 月 31 日的一次决斗中被杀了.

在学校的第一年，Galois 发表了四篇文章. 1829 年，他把解方程的两篇文章呈送科学院. 这些文章被托给了 Cauchy，他把它们遗失了. 1830 年 1 月，他交给科学院另外一篇仔细写成的关于他的研究的文章. 该文送到 Fourier 那里，之后不久 Fourier 就死了，因而这篇文章也被遗失了. 在 Poisson 提议下，Galois 就他的研究写了(1831)一篇新文章《关于用根式解方程的可解性条件》①. 这篇文章是他在方程的解的理论方面仅有的一篇完成了的文章，被 Poisson 作为难以理解而退回，并劝告他应写一份较详尽的阐述. 在 Galois 死的前夜，他为他的研究起草了一份匆忙写成的说明，托给了他的朋友 August Cheralier. 这个说明被保存下来了.

1846 年，Liouville 在《数学杂志》②上编辑出版了 Galois 的部分文章，其中包括 1831 年文章的一个修订. 后来 Serret 的 1866 年的《高等代数教程》(*Cours d'algèbre supérieure*)第三版对 Galois 的思想作了一个叙述. 对 Galois 理论第一个全面而清楚的介绍是 Camille Jordan 于 1870 年在他的书《置换和代数方程专论》(*Traité des substitutions et des équations algébriques*)中给出的.

Galois 是通过改进 Lagrange 的思想去探讨可用根式求解的

---

① *Œuvres*, 1897, 33～50.

② *Jour. de Math.*, 11, 1846, 381～444.

方程的特性问题的,虽然他也从 Legendre,Gauss,Abel 的著作中得到一些启发.他提出考虑一般方程,这当然就是

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0. \tag{4}$$

同 Lagrange 的著作中一样,其中的系数必须是独立的或完全任意的.他还提出考虑特殊的方程,如

$$x^4 + px^2 + q = 0, \tag{5}$$

其中仅有两个系数是独立的. Galois 的主要思想是要绕开构造这给定多项式的 Lagrange 预解式(第 25 章第 2 节),这种构造需要很高的技巧并且没有明确的成套方法.

和 Lagrange 一样,Galois 用了根的置换或排列的概念.例如,设 x_1,x_2,x_3,x_4 是一个四次方程的四个根,则在包含这些 x_i 的任何表达式中交换 x_1 和 x_2 就是一个置换,这个特别的置换用

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_1 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

来表示,另一个置换由

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}$$

表示.实行第一个置换后进行第二个置换,等价于实行第三个置换

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_4 & x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix},$$

因为,例如由第一个置换,x_1 换成 x_2;由第二个置换,x_2 又换成 x_4;而由第三个置换,x_1 直接就变到 x_4.我们就说头两个置换按上述顺序作成的**乘积**就是第三个置换.总共有 4! 个可能的置换.因为置换集合中任何两个置换的乘积仍是原集合的成员,所以置换的集合就说是形成一个群.这个概念,当然还不是抽象群的正式定义,它是属于 Galois 的.

为了掌握 Galois 的思想，让我们考虑方程①

$$x^4 + px^2 + q = 0,$$

这里 p 和 q 是独立的. 令 R 是由 p 和 q 的有理表达式所形成的域，这些表达式的系数在有理数域中，一个典型的表达式是 $(3p^2 - 4q)/(q^2 - 7p)$. 按 Galois 的说法，R 是由添加字母或未知数 p, q 到有理数中而得到的域. 这个域 R 是给定方程的系数域或有理整环，这个方程就说是属于这个域 R. 和 Abel 一样，Galois 没有用域或有理整环这术语，但他确实用了这概念.

我们恰好知道这四次方程的根是

$$x_1 = \sqrt{\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}}, \quad x_2 = -\sqrt{\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}},$$

$$x_3 = \sqrt{\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}}, \quad x_4 = -\sqrt{\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}}.$$

于是，系数在 R 中的两个关系

$$x_1 + x_2 = 0, \ x_3 + x_4 = 0$$

对这些根成立. 由于我们的方程是四次的，因而有根的 24 个可能置换. 下面八个置换：

$$E = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \ E_1 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_1 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_4 & x_3 \end{pmatrix}, \ E_3 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_1 & x_4 & x_3 \end{pmatrix},$$

$$E_4 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \end{pmatrix}, \ E_5 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_4 & x_3 & x_1 & x_2 \end{pmatrix},$$

$$E_6 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_3 & x_4 & x_2 & x_1 \end{pmatrix}, \ E_7 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix},$$

---

① 由于 Galois 自己对他的思想介绍是不清楚的，并且他引进了那么多的新概念，所以我们将借助于 Verriest 提出的一个例子（看本章末尾的书目）来弄清楚 Galois 理论.

使在 R 中这两个关系保持成立①. 可以证明,这八个置换是24个置换中使根之间在 R 中的全部关系都不变的仅有的置换. 这八个置换便是这方程在 R 中的群. 他们是整个群的一个子群. 就是说,一个方程相对于域 R 的群是根的置换的群或子群,这些置换使给定方程(不管一般或特殊的)的根之间带有 R 中的系数的全部关系不变. 我们能说,使 R 中全部关系不变的置换的数目是我们对根的无知程度的一个尺度,因为在这八个置换之下我们不能把它们区分开来.

现在考虑 $x_1^2-x_3^2$,它等于$\sqrt{p^2-4q}$. 添加这个根式到 R 中,形成一个域 R',即我们形成包含 R 和$\sqrt{p^2-4q}$ 的最小的域. 于是

$$x_1^2-x_3^2=\sqrt{p^2-4q} \tag{6}$$

是 R'中的一个关系. 由于 $x_1+x_2=0$ 和 $x_3+x_4=0$,我们还有

$$x_1^2=x_2^2 \quad 和 \quad x_3^2=x_4^2.$$

于是由最后这两件事实,我们能说,上面八个置换的前四个使 R' 中的关系(6)保持成立,但后四个则不行. 于是这四个置换,如果它们使根之间的每个在 R'中正确的关系保持不变,就是方程在 R'中的群. 这四个置换是八个置换的一个子群.

现设我们添加量$\sqrt{(-p-D)/2}$ 到 R'中,这里 $D=\sqrt{p^2-4q}$,并形成域 R'',则

$$x_3-x_4=2\sqrt{\frac{-p-D}{2}}$$

是 R''中的一个关系. 这个关系仅在头两个置换 E 和 E_1 下保持不变,而在八个置换的其余置换下不这样. 倘若根之间的每个在 R''

---

① 对一般的 n 次方程,即,以 n 个独立的量作为系数的方程,根的一个函数在根的一个置换下是不变的,或不被这个置换改变,当且仅当它保持同原来的函数恒等. 如果系数全是数值,则一个函数是不变的,如果它保持数值上相同. 例如对 $x^3+x^2+x+1=0$,根是 $x_1=-1$,$x_2=\mathrm{i}$ 和 $x_3=-\mathrm{i}$. 考虑 x_2^2. 用 x_3 代替 x_2,给出 x_3^2. 这同 x_2^2 有相同的数值. 于是 x_2^2 在这个置换下不变. 如果系数包含一些数值和一些独立的量,则根的一个函数在根的置换下保持不变,如果函数对独立的量的所有的值(这些量的定义域中的)和对根的所能取到的数值在数值上相同的话.

中的关系在这两个置换下都保持不变,则方程在 R''中的群由这两个置换组成.这两个置换是那四个置换的一个子群.

设我们添加量$\sqrt{(-p+D)/2}$ 到 R''中,又得到 R'''. 在 R'''中我们有

$$x_1 - x_2 = 2\sqrt{\frac{-p+D}{2}}.$$

现在恰有 E 是使 R'''中全部关系保持正确的仅有的置换;因而这是方程在 R'''中的群.

从上面的讨论可以看到,方程的群是它的可解性的关键,因为这个群表示出根的不可区分的程度.它告诉我们,关于根有哪些东西我们还不知道.

存在许多群,或严格地说是一个置换群和依次包含如上的一些子群.现在一个群(或子群)的阶就是其中元素的个数.于是我们就有了阶为 24, 8, 4, 2, 1 的群.子群的阶总能整除母群的阶(第 6 节).一个子群的指数是它所在的群的阶被子群的阶除所得的商.例如那个 8 阶子群的指数就是 3.

上面的概要仅仅表明 Galois 所论述的思想.他的工作如下进行:给了一个一般的或特殊的方程,他首先说明如何能找到这个方程在系数域中的群 G,即根的置换的群,而这些置换使根之间的系数在该域中的全部关系保持不变.当然我们必须在不知道根的情况下找到这个方程的群.在上面的例子中,四次方程的群是 8 阶的,而系数域是 R.在找到了方程的群 G 后,下一步是找 G 的最大的子群 H.在我们的例子中,这是一个四阶子群.假如有两个或多个最大子群,可任取一个.H 的确定是纯粹群论的事,是能够做到的.找到 H 后,可以用一套仅含有理运算的手续来找到根的一个函数 ϕ,它的系数属于 R,并且在 H 的置换下,它不改变值,但在 G 的所有别的置换 T 下,就要改变值.在我们上面的例子中,这个函数是 $x_1^2 - x_3^2$. 实际上可得到无穷多个这样的函数.当然我们必须

在不知道根的情况下找出这样一个函数. 存在一种方法构造 R 中的一个方程,使它的一个根就是这个函数 ϕ. 这个方程的次数是 H 在 G 中的指数. 这个方程称为一个部分预解式①. 在我们的例子中,这方程是 $t^2-(p^2-4q)=0$, 它的次数是 8/4 或 2.

接着必须能从这个部分预解式解出根 ϕ. 在我们的例子中,ϕ 是 $\sqrt{p^2-4q}$. 添加 $\sqrt{p^2-4q}$ 到 R 中,得到一个新的域 R'. 于是可以证明,原来方程关于域 R' 的群是 H.

我们现在重复这个步骤. 在我们的例子中我们有群 H,是四阶的,以及域 R'. 下一步找 H 的最大子群. 在我们的例子中,它是 2 阶子群,称这个子群为 K. 现在能得到原方程的根的一个函数,它的系数属于 R',它的值在 K 的每个置换下不变,而在 H 的其他置换下要改变. 在我们上面的例子中这方程是 $t^2-2(-p-\sqrt{p^2-4q})=0$. 这方程的次数是 K 关于 H 的指数,即 4/2 或 2. 这方程是第二个部分预解式.

接着必须解出这个预解式方程,得到一个根,即函数 ϕ_1;把这个值添加到 R' 中,从而形成域 R''. 对于 R'',方程的群是 K.

再重复这个过程,找到 K 的最大子群 L. 在我们的例子中这恰是恒等置换 E. 我们找根的一个函数(系数在 R'' 中),它在 E 下保持值不变,而在 K 的别的置换下改变它的值. 在我们的例子中,这样一个函数是 x_1-x_2. 为了在不知道根的情况下得到这个 ϕ_2,我们必须构造 R'' 中的一个方程,以函数 ϕ_2 为一个根. 在我们的例子中,这方程是 $t^2-2(-p+\sqrt{p^2-4q})=0$. 这方程的次数是 L 关于 K 的指数,在我们的例子中是 2/1 或 2. 这方程是第三个部分预解式. 我们必须解这个方程,以找到值 ϕ_2.

在添加这个根到 R'' 中以后,得到 R'''. 假设我们已到了最后一步,这里,原方程在 R''' 中的群是恒等置换 E.

---

① 预解式这词的这个用法与 Lagrange 的用法不同.

接着 Galois 证明了，当一个方程关于给定域的群恰是 E 时，那么方程的各个根都是属于那个域. 因此，根在域 R''' 中. 又因 R''' 是由已知域 R 用逐次添加已知量得到的，我们就知道了根所在的这个域. 其次有一个用 R''' 中有理运算来直接找根的步骤.

Galois 给出了一个方法来找给定方程的群，逐次的预解式以及方程关于逐次扩大了的系数域的群，即原来群的逐次的子群，而扩大的系数域是由添加这些逐次的预解式的根到原来的系数域而得到的. 这些步骤包含了可观的理论，但正如 Galois 指出的，他的工作不打算成为解方程的一个实际方法.

接着 Galois 把上面的理论运用到以有理运算和根式解多项式方程的问题. 这里他引进了群论的另一个概念. 设 H 是 G 的一个子群，如果用 G 的任一元素 g 乘 H 的所有置换，则得到一个新的置换集合，用 gH 表示，这符号表示先实行置换 g，然后再应用 H 的任一元素. 如果对 G 中的每个 g 有 $gH = Hg$，则称 H 为 G 的一个正规子群(自共轭或不变)子群.

我们回忆 Galois 的解方程的方法需要找寻和求解逐次的预解式. Galois 证明了当作为约化方程的群(比如说由 G 约化到 H)的预解式是一个素数次 p 的二项方程 $x^p = A$ 时，则 H 是 G 的一个正规子群(且有指数 p)；反之，如 H 是 G 的一个正规子群，且具有素指数 p，则相应的预解式是 p 次二项方程，或能化简到这样的方程. 如所有的逐次预解式都是二项方程，则由 Gauss 关于二项方程的结果，我们能用根式解原来的方程. 因为我们知道，我们能从最初的域通过逐次添加根式的方法过渡到根所在的最后的域. 反之，如果一个方程能用根式求解，则预解式方程组必定存在，而且它们都是二项方程.

如此，可用根式求解的理论与前面所给的求解理论在一般轮廓上是相同的；不同的只是在子群序列

$$G, H, K, L, \cdots, E$$

中,必须每一个都是前一个群的极大正规子群(不是任何较大的正规子群的子群).这样的序列叫做合成序列. H 对 G 的指数,K 对 H 的指数,如此等等,叫做合成序列的指数.若这些指数都是素数,则这方程就能用根式求解,而若这些指数不是素数,则这方程就不能用根式求解.当我们找极大正规子群序列时,可能有选择;即在一个给定的群或子群中最高阶的极大正规子群可能多于一个,我仍可选任何一个,虽然由此而得的子群可能不同,但将产生完全相同的指数集合,虽然这些指数出现的次序可以不同(参看下面的 Jordan-Hölder 定理).包含一个素数指数的合成序列的群 G 称为可解的.

Galois 理论是如何证明当 $n>4$ 时一般的 n 次方程不能用根式求解,而 $n\leqslant 4$ 时又都能求解呢?对一般的 n 次方程,这个群由 n 个根的全部 $n!$ 个置换组成.这个群称为 n 级对称群.它的阶当然是 $n!$.对每个对称群,不难找到合成序列.这里极大正规子群(称为交错子群)具有阶 $n!/2$.这个交错群仅有的正规子群是恒等元素.因此指数是 2 和 $n!/2$.但对 $n>4$,数 $n!/2$ 决不是素数.因此次数大于 4 的一般方程不能用根式求解.另一方面,二次方程可以借助单独一个预解式方程而解出.合成序列的指数恰由单个数 2 组成.一般的三次方程,为了求解,需要两个预解式方程,其形式为 $y^2=A$ 和 $z^3=B$.这些当然是二项预解式,合成序列的指数是 2 和 3.一般的四次方程能够求解,因为它有四个二项预解式方程,一个三次的、三个二次的,因而合成序列的指数是 2, 3, 2, 2.

对于数字系数的方程,与带有独立的文字系数的方程不同,Galois 给出了一个与上述相似的理论.然而,判定可用根式求解的手续更复杂,虽然基本原理是相同的.

Galois 还证明了一些特殊的定理.如果有一个素数次的不可约方程,它的系数在一个域 R 中,它的根全部是其中两个根的带有 R 中系数的有理函数,则此方程可用根式求解.他还证明了逆

定理:每个可用根式求解的素数次的不可约方程,具有性质:每个根都是其中两个根的带有 R 中系数的有理函数.这样的方程现在叫做 Galois 方程. Galois 方程的最简单的例子是 $x^p-A=0$. 这个概念是 Abel 方程的推广.

附带说一下, Hermite① 和 Kronecker 在给 Hermite 的一封信② 及后来的一篇文章③ 中,用椭圆模函数解出了一般的五次方程,这类似于用三角函数来解不可约的三次方程.

5. 几何作图问题

18 世纪的数学家们怀疑一些著名的作图问题能被解决. Galois 的工作提供了可作图的一个判别法,这个判别法解决了一些著名的问题.

用圆规、直尺作图的每一步都需要找一个交点,或者是属于两条直线的,或者是一直线和一圆的,或者是两个圆的. 由于引进了坐标几何,人们认识到,用代数术语说,这样的步骤意味着同时求解两个线性方程,或一个线性和一个二次方程,或两个二次方程. 在任何一种情况下,可能遇到的最坏情况,在代数上是一个平方根. 因此,由相继的步骤或作图所找到的量,最坏的结果是施加于给定量上的一串**平方根**. 因此,可以作图的量必须位于如下一些域中,这些域是由包含给定量的域仅仅添加给定量的平方根或后来作出的量的平方根而得到. 我们称这样的扩张域为二次扩张域.

在进行相继的作图时,有几个限制必须注意. 例如,某些步骤允许用任意的直线或圆. 譬如在二等分线段时,我们能用大于线段一半的圆. 我们必须在给定元素的域中在可作图的扩张域中选择

① *Comp. Rend.*, 46, 1858, 508 ~ 515 = *Œuvres*, 2,5~12.

② *Comp. Rend.*, 46,1858, 1 150 ~ 1 152 = *Werke*, 4,43~48.

③ *Jour. für Math.*, 59,1861, 306 ~ 310 = *Werke*, 4,53~62.

这个圆. 这是能做到的.

还有,扩张域可以包含复元素,因为,譬如说,负坐标的平方根可能出现. 这些复元素是可作图的,因为所出现的复量的实部和虚部的每一个都是一个实方程的根;而这些根是可作图的.

给了一个作图问题,首先要建立一个代数方程,它的解是所要求的量. 这个量必须属于给定量的域的某个二次扩张域. 在正17边形的情况里,这方程是 $x^{17}-1=0$, 而给定的量可以取成单位圆的半径. 相关的不可约方程是 $x^{16}+x^{15}+\cdots+1=0$. 用 Galois 理论的术语说,一个方程能用*平方根*求解的必要和充分条件是方程的 Galois 群的阶是2的方幂. 方程 $x^{16}+x^{15}+\cdots+1=0$ 正是这种情况,合成序列是2, 2, 2, 2. 这意思是说,预解式是次数为2的二项方程,从而仅有平方根被添加到原来的由单位圆的给定半径所确定的有理域中. 由 Galois 的这个判别法我们能证明 Gauss 的结论,即素数 p 边的正多边形能用直尺和圆规作图当且仅当素数 p 具有形式 $2^{2^n}+1$, 即当 $p=3, 5, 17, 257, \cdots$ 时,而对 $p=7, 11, 13, 19, 23, 29, 31, \cdots$ 则不行. Galois 理论还能用来证明三等分任意角或倍立方体的问题都是不可解的.

但 Galois 的判别法完全不适用于化圆为方的问题. 这里,给定量是圆的半径,要解的方程是 $x^2=\pi r^2$. 虽然这个方程本身恰为二次,但下述事实不对,即它的解属于由给定量确定的域的二次扩张域,这是因为 π 不是一个代数无理数(第41章第2节). 因此, Galois 的工作不仅完全回答了哪些方程可用代数运算求解的问题,而且给了一个一般的判别法来判定几何图形利用直尺和圆规的可作图性.

就著名的作图问题而言,应该注意,在应用 Galois 理论以前, Gauss 和 Wantzel 已经确定了哪些正多边形可以作图(第2节),而且 Wantzel 在1837年的文章①中证明了一般的角不能三等分,

① *Jour. de Math.*, 2, 1837, 366～372.

给定的立方体也不能加倍. 他证明了每个可作图的量必须满足一个 2^n 次的方程,而这对刚才说到的两个问题是不成立的.

6. 置换群理论

Lagrange 在他关于方程可解性的著作中(第 25 章第 2 节)引进了 n 个根的一些函数作为他的分析的关键,这些函数在根的某些排列下取相同的值. 因此他就在这些文章中着手研究函数,目的是确定它们在 n 个变数(根)的 $n!$ 种排列下引起的 $n!$ 个可能值中能取到的不同的值. Ruffini, Abel, Galois 的后继工作使这个课题增加了重要性. n 个字母的一个有理函数在根的排列或置换的某个集合下取同样的值,这个事实表明,正如我们已经看到的,这个集合是整个对称群的子群. Ruffini 在他的《方程的一般理论》(*Teoria generale delle equazioni*, 1799)中对这件事作了明显的考察. 因此,Lagrange 所开创的是研究置换群的子群的一种方法. 当然,更直接的方法是研究置换群本身,并确定它的子群. 研究置换群结构或组成的两种方法都成了活跃的课题,即使不顾及它同方程可解性的联系,它本身还是被追求作为一种兴趣. 置换群或排列群的理论是最终产生抽象群论的第一个重要的研究. 这里我们将指出在 19 世纪中获得的有关置换群的一些具体定理.

Lagrange 自己肯定了一个重要结果,用近代语言叙述就是,子群的阶整除群的阶. 这个定理的证明是由 Pietro Abbati(1768—1842)在 1802 年 9 月 30 日的一封信中通知 Ruffini 的,此信已发表①.

Ruffini 在他 1799 年的书中引进了传递性和本原性的概念,虽然有一些模糊. 如果一个排列群的每个字母在群的各排列下被每一个别的字母所代替,则称这群为传递群. 如果 G 是一个传递

① *Memorie della Società Italiana delle Scienze*, 10, 1803, 385～409.

群,设 n 个符号或字母可分成 r 个不同的子集 σ_i, $i=1, 2, \cdots, r$,每个子集包含 s_i 个符号,使得 G 的任一个排列或是将 σ_i 的符号在自己中间排列,或是用 σ_j 来代替 σ_i,此事对每个 $i=1, 2, \cdots, r$ 都成立,则称 G 为非本原的. 如果 n 个符号不能这样分拆,则这传递群称为一个本原群. Ruffini 还证明了,在一个 n 阶的群中,对所有 k,不存在 k 阶子群.

受 Lagrange 和 Ruffini 的工作的鼓励,Cauchy 写了一篇关于置换群的重要文章①. 以方程论为背景,他证明了,不存在 n 个字母(n 次)的群,使得它对 n 个字母的整个对称群的指数小于不超过 n 的最大素数,除非这个指数是 2 或 1. Cauchy 用函数值的语言叙述这个定理:n 个字母的非对称函数的不同的值的数目不能小于比 n 小的最大素数,除非它是 2.

Galois 在引进置换群的概念和定理方面迈出了最大的一步. 他的最重要的概念是正规(不变或自共轭)子群的概念. 属于 Galois的另一个群论概念是两个群之间的同构的概念. 这是两个群的元素之间的一一对应,使得如果在第一个群中有 $a\cdot b=c$,则对第二个群的对应元素,有 $a'\cdot b'=c'$. 他还引进了单群和合成群的概念. 一个没有不变子群的群是单群;否则是合成群. 关于这些概念,Galois 表述了一个猜想②,即阶是合成数的最小单群是 60 阶的群.

遗憾的是在 Liouville 1846 年发表 Galois 的部分著作以前,人们不知道 Galois 的著作,甚至那些发表的材料也不容易读懂. 另一方面,Lagrange 和 Ruffini 关于置换群的著作是人们熟知的,这些著作是用 n 个文字的函数所能取的函数值的语言表达的. 因此,方程求解的课题失去了重要性,因而当 Cauchy 转到方程论时,他集中全力于置换群. 在 1844 年到 1846 年间,他写了一大批

① *Jour. de l'Ecole Poly.*, 10,1815, 1 ~ 28 = *Œuvres*, (2),1,64~90.

② *Œuvres*, 1897 ed., 26.

文章.在其中一篇主要的文章①中,他把早先的很多结果系统化,并证明了许多关于传递的、本原的和非本原的群,关于非传递群的特殊定理.特别地,他证明了 Galois 的断言,即每个有限(置换)群,如果它的阶可被一个素数 p 除尽,就必定至少包含一个 p 阶子群.这篇主要文章之后又发表了大量的其他文章,刊载在 1844—1846 年②的巴黎科学院的《报告》上.这工作的大部分是涉及 n 个字母的函数在字母交换下所能取的形式值(即非数字值)以及找出函数使其取给定数目的值.

在 Liouville 发表了 Galois 的一些著作后,Serret 在巴黎大学理学院作了演讲,并在他的《教程》的第三版中给了 Galois 的理论一个较好的教科书式的叙述.此后,澄清 Galois 关于方程可解性的思想和建立置换群理论就齐头并进了.Serret 在他的教科书中对 Cauchy 1815 年的结果给了一个改进的形式.如果 n 个字母的一个函数有少于 p 个值,其中 p 是小于 n 的最大素数,则此函数不能有两个以上的值.

Serret 在 1866 年的教科书中强调的问题之一是,找出由 n 个字母所能形成的全部的群.这个问题早已吸引了 Ruffini 的注意,他,Cauchy 和 Serret 本人在 1850 年③的一篇文章中给出了许多部分性的结果,就像 Thomas Penyngton Kirkman(1806—1895)所做的一样.尽管有这许多努力和成百个有局限性的结果,这问题还是未能解决.

在 Galois 以后,Camille Jordan(1838—1922)是使 Galois 理论显著增色的第一个人.1869 年④他证明了一个基本结果.设 G_1 是 G_0 的极大自共轭(正规)子群,G_2 是 G_1 的极大自共轭子群,如

---

① *Exercices d'analyse et de physique mathématique*, 3, 1844, 151 ~ 252 = *Œuvres*, (2), 13, 171~282.

② *Œuvres*, (1), Vols. 9 与 10.

③ *Jour. de Math.*, (1), 15, 1850, 45~70.

④ *Jour. de Math.*, (2), 14, 1869, 129 ~ 146 = *Œuvres*, 1, 241~248.

此等等,直到这序列终止于恒等元素.这个子群序列称为 G_0 的合成序列.若 G_{i+1} 是 G_i 中阶为 r 的任一自共轭子群,G_1 的阶为 p,则 G_i 可分解成 $\lambda = p/r$ 个类.两个元素,若其中一个是另一元素和 G_{i+1} 的一个元素的积,则属于同一类.若 a 是一个类的任一元素,而 b 是另一类的任一元素,则其积将在同一个第三类中.这些类形成一个群,以 G_{i+1} 为它的恒等元素,这个群就称为 G_i 在 G_{i+1} 下的商群或因子群,用 G_i/G_{i+1} 表示,这是 Jordan 在 1872 年引进的符号.商群 G_0/G_1, G_1/G_2, …,称为 G_0 的合成因子群,它们的阶称为合成因子或合成指数.G_0 中可能有多于一个合成序列.Jordan 证明了,除了出现的次序以外,合成因子的集合是不变的,莱比锡大学的教授(Ludwig)Otto Hölder(1859—1937)证明了①,商群本身是与合成序列无关的;就是说,对任何合成序列,将有同样的商群的集合.这两个结果合称为 Jordan-Hölder 定理.

(有限)置换群的知识及其与 Galois 关于方程理论的联系直到 1870 年才由 Jordan 组织到他的《置换和代数方程专论》(*Traité des substitutions et des équations algébriques*, 1870)这本名著中.在这本书中,Jordan 和几乎所有他的前人一样,把置换群定义成置换的这样一种集合,即集合中任两成员的积仍属于这集合.我们今天在群的定义中作为公设提出的其他性质(第 49 章第 2 节)是被使用了,但或是作为这种群的明显性质,或是作为附加的条件,而不是在定义中指定.《专论》提供了新结果,并对置换群明白地建立了同构和同态的概念,后者是两个群之间的多一对应,使得 $a \cdot b = c$ 蕴含 $a' \cdot b' = c'$.Jordan 添加了关于传递群和合成群的基本结果.书中还包含了 Jordan 对 Abel 提出的问题的解答,即确定一个给定次数的能用根式求解的方程,以及识别一个给定的方程是否属于这个类.可解方程的群都是交换群,Jordan 称它们为 Abel 群,而 Abel 群这个术语此后也就用于交换群了.

① *Math. Ann.*, 34,1889,26~56.

关于置换群的另一个重要的定理是在《专论》出现以后不久由一个挪威数学教授 Ludwig Sylow(1832—1918)证明的. Cauchy 曾经证明,阶可被一个素数 p 整除的每一个群,必包含一个或多个 p 阶子群. Sylow① 推广了 Cauchy 的定理. 如果一个群的阶可被 p^{α} 整除,但不被 $p^{\alpha+1}$ 整除,而 p 是素数,则此群包含一组且仅仅一组共轭的 p^{α} 阶子群②. 在同一篇文章中 Sylow 还证明了,每个 p^{α} 阶的群是可解的,即,极大不变子群序列的指数都是素数.

对置换群以及最终对更一般群的完全另外的探索是受纯物理的研究的启发的. 物理学家和矿物学家 Auguste Bravais(1811—1863)研究了运动群③,以确定晶体的可能结构. 这个研究在数学上等价于查明行列式为 +1 和 −1 的三个变量的线性变换

$$x_i' = a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z,\ i = 1,\ 2,\ 3 \tag{7}$$

的群,它引导 Bravais 到晶体中可能出现的 32 类对称的分子结构.

Bravais 的工作给 Jordan 以深刻的印象,他着手研究他称之为群的解析表示,以及现代称之为群的表示理论. 实际上,Serret 在他 1866 年出版的《教程》中已经考虑了用形如

$$x' = \frac{ax + b}{cx + d} \tag{8}$$

的变换来表示置换. 但各类群的更为有用的表示是由 Jordan 引进的. 他探索用形式为

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{9}$$

的线性变换来表示置换. 由于置换群是有限的,所以必须对变换加上一些限制,以使这个变换群有限. Galois 曾经考虑过这样的变换④,且以系数和变数在一个素数阶的有限域上取值来限制它们.

---

① *Math. Ann.*, 5,1872,584～594.

② 设 H 是 G 的子群而 g 是 G 的任一元素,则 $g^{-1}Hg$ 是一个共轭于 H 的子群,H 和它的所有的共轭称作 G 的子群的共轭系或子群的完全共轭集.

③ *Jour. de Math.*, 14,1849,141～180.

④ *Œuvres*, 1897 ed., 21～23,27～29.

Jordan 在 1878 年①陈述了有限周期 p 的线性齐次置换(9)可以线性地变换到标准型

$$y_i' = \varepsilon_i y_i,\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$

这里 ε_i 是 p 次单位根. 这定理很多人证明过②. 这件事成为一个大量研究的开端,即对给定的阶确定二元型和三元型(两个变数和三个变数)的所有可能的线性置换的群. 还有,对给定的线性置换群确定子群以及确定在群或子群的全部成员下保持不变的代数式,这些问题也引起了很多研究.

注意到 Bravais 的文章后,Jordan 立即进行了关于**无限群**的第一个重要的研究. 在他的文章《关于运动群的研究报告》中③,Jordan 指出,确定全部的运动群(他仅考虑了平移和转动)等价于确定全部可能的分子系统,使得任一个群的每一个运动将对应的分子系统变换到它自己. 由此他研究了各种类型的群,并将它们分类. 这个结果不如下列事实的意义显著,即他的文章开创了在群的标题下研究几何变换,而且几何学家很快就挑选了这条思想路线(第 38 章第 5 节).

19 世纪中叶的另一个发展既值得注意又有启发性. 很受 Cauchy 工作影响的 Arthur Cayley 认识到,置换群的概念可以推广. 在三篇文章中④,Cayley 引进了**抽象群**的概念. 他把一个一般的算子符号 θ 用于一组元素 $x,\ y,\ z,\ \cdots$,并说如此应用的 θ 产生 $x,\ y,\ z,\ \cdots$的一个函数 $x',\ y',\ z',\ \cdots$,他指出,特别地,θ 可以是一个置换. 抽象群包含很多算子 $\theta,\ \phi,\ \cdots$,而 $\theta\phi$ 是两个算子的复合(乘积),复合是可结合的,但不一定是可交换的. 他的群的一般定

---

① *Jour. für Math.*, 84,1878,89～215, p. 112 in particular = *Œuvres*, 2,13～139, p. 36 in particular.

② 看 E. H. Moore, *Math. Ann.*, 50,1898,215.

③ *Annali di Mat.*, (2),2,1868/1869,167～215 和 322 ～ 345 = *Œuvres*, 4,231～302.

④ *Phil. Mag.*, (3),34,1849, 527 ～ 529 = *Coll. Math. Papers*, 1,423～424 和(4),7,1854,40～47 和 408 ～ 409 = *Papers*, 2,123～130 和 131～132.

义要求算子 1, α, β, …的一个集合,它们全不相同,使得其中任两个算子在任何一个次序下的积和任一个算子同它自己的积都属于该集合①. 他举出矩阵在乘法下以及四元数(在加法下)构成群. 很遗憾,Cayley 对抽象群概念的引进这时没有引起注意. 这部分地是由于矩阵和四元数是新的,不为人们所熟知,而能符合群的概念的很多其他数学系统或者还有待于发展,或者未被认识到可以这样归类. 过早的抽象落到了聋子的耳朵里,无论它们是属于数学家们的还是属于大学生们的.

参 考 书 目

Abel, N. H.: *Œuvres complètes* (1881), 2 vols., Johnson Reprint Corp., 1964.

Bachmann, P.: "Über Gauss' zahlentheoretische Arbeiten", *Nachrichten König. Ges. der Wiss. zu Gött.*, 1911, 455～518. Also in Gauss's *Werke*, 10, Part 2, 1～69.

Burkhardt, H.: "Endliche discrete Gruppen", *Encyk. der Math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1903～1915, Ⅰ, Part 1, 208～226.

Burkhardt, H: "Die Anfänge der Gruppentheorie und Paolo Ruffini", *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik*, Heft 6, 1892, 119～159.

Burns, Josephine E.: "The Foundation Period in the History of Group Theory", *Amer. Math. Monthly*, 20, 1913, 141～148.

Dupuy, P.: "La Vie d'Evariste Galois", *Ann. de l'Ecole Norm. Sup.*, (2), 13, 1896, 197～266.

Galois, Evariste: "Œuvres", *Jour. de Math.*, 11, 1846, 381～444.

Galois, Evariste: *Œuvres mathématiques*, Gauthier-Villars, 1897.

Galois, Evariste: *Ecrits et mémoires mathématiques* (ed. by R. Bourgne and J. -P. Azra), Gauthier-Villars, 1962.

Gauss, C. F.: *Disquisitiones Arithmeticae* (1801), *Werke*, Vol. 1, König. Ges. der Wiss., zu Göttingen, 1870, English translation by Arthur A. Clarke, S. J., Yale

---

① *Papers*, 2, 124.

University Press, 1966.

Hobson, E. W.: *Squaring the Circle and Other Monographs*, Chelsea (reprint), 1953.

Hölder, Otto: "Galois'sche Theorie mit Anwendungen", *Encyk. der Math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1898～1904, Ⅰ, Part 1, 480～520.

Infeld, Leopold: *Whom the Gods Love: The Story of Evariste Galois*, McGraw-Hill, 1948.

Jordan, Camille: *Œuvres*, 4 vols., Gauthier-Villars, 1961～1964.

Jordan, Camille: *Traité des substitutions et des équations algébriques* (1870), Gauthier-Villars (reprint), 1957.

Kiernan, B. M.: "The Development of Galois Theory from Lagrange to Artin", *Archive for History of Exact Sciences*, 8, 1971, 40～154.

Lebesgue, Henri: *Notice sur la vie et les travaux de Camille Jordan*, Gauthier-Villars, 1923. Also in Lebesgue's *Notices d'histoire des mathématiques*, pp. 44～65, Institut de Mathématiques, Genève, 1958.

Miller, G. A.: "History of the Theory of Groups to 1900", *Collected Works*, Vol. 1, 427～467, University of Illinois Press, 1935.

Pierpont, James: "Lagrange's Place in the Theory of Substitutions", *Amer. Math. Soc. Bull.*, 1, 1894/1895, 196～204.

Pierpont, James: "Early History of Galois's Theory of Equations", *Amer. Math. Soc. Bull.*, 4, 1898, 332～340.

Smith, David Eugene: *A Source Book in Mathematics*, Dover (reprint), 1959, Vol. 1, 232～252, 253～260, 261～266, 278～285.

Verriest, G.: *Œuvres mathématiques d'Evariste Galois* (1897 ed.), 2nd ed., Gauthier-Villars, 1951.

Wiman, A.: "Endliche Gruppen linearer Substitutionen", *Encyk. der Math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1898～1904, Ⅰ, Part 1, 522～554.

Wussing, H. L.: *Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffes*, VEB Deutscher Verlag der Wiss., 1969.

第 32 章

四元数,向量和线性结合代数

> Hamilton 做了确实非常出色的工作,之后,四元数就诞生了;虽然美妙而富有创造性,但对于以任何方式接触过它们的那些人来说曾经是一个纯粹的邪念……向量是无用的幸存物或四元数的无价值的支流,对任何创造,从未有过最微细的应用.
>
> Lord Kelvin

1. 关于型的永恒性的代数基础

Galois 关于可用代数步骤求解的方程的工作结束了代数的一章,虽然他引进了诸如群和有理整环(域)等概念(它们将结出果实),但这些概念的充分开发必须等待其他概念的发展.下一个重要的代数创造,由 William R. Hamilton 所创始,揭开了全新的领域,打破了对于"数"所必须遵循的规则的古老信念.

为了评价 Hamilton 工作的独创性,我们必须考察在 19 世纪前半期所普遍理解的普通代数的逻辑.1800 年,数学家们自由地使用各类实数以至复数,但是既没有这些不同类型的数的精确定义,也没有关于数的运算的任何逻辑检验.对这种情况不满的表示是很多的,但被淹没于代数和分析的大量新创造中.最大的不安似乎产生于下述事实:使用文字时就好像它们具有整数的性质,然而当文字被任何数代替时这些运算的结果却都有效.由于各种类型的数的逻辑没有建立,所以不可能理解它们具有同正整数相同形式的性质,从而不可能理解只代表任一类实数或复数的文字表达

式必然具有相同的性质——即通常的代数恰是一般化的算术.似乎文字表达式的代数具有自己的逻辑,它说明文字表达式的有效性和正确性.因此在 18 世纪 30 年代数学家们就着手解决用文字或符号表达式进行运算的正确性问题.

这个问题首先被剑桥大学的数学教授 George Peacock (1791—1858)考虑到.为了说明用文字表达式进行运算的正确性,这些表达式要能代表负数、无理数和复数,他区分了算术代数和符号代数.前者是处理表示正整数的符号,所以有坚实的基础.这里仅有导致正整数的运算才被允许.符号代数采用算术代数的规则,但取消限于正整数的限制.在算术代数中推出的全部结果与符号代数中的结果都一样;但算术代数中的表达式在形式上是普遍的,在值上是特殊的,而符号代数中的表达式,在值上和在形式上都是普遍的.例如,在算术代数中 $a^m a^n = a^{m+n}$ 当 m 和 n 是正整数时成立,因而在符号代数中它对所有 m 和 n 都成立.同样地,$(a+b)^n$ 当 n 是正整数时的级数,如果用不带末项的一般形式来显示,就对所有 n 成立.Peacock 的论证被称为型的永恒性原理.

这个原理的明白的叙述,见于 Peacock 的《关于分析的某些分支的新近成就和现状的报告》[①],在其中他不仅作了报告,而且还作了武断的肯定.关于符号代数,他说:

1. 符号在值和表现上都是无限的.
2. 无论是什么符号,在它们上作运算,对所有情况都能进行.
3. 符号组合的法则属于这样一类法则,即当符号是算术量时,且当它们所受到的运算用算术代数中同样的名字来称呼时,它与算术代数的法则普遍符合.

从这些原理出发,他相信他能推出型的永恒性原理:"无论什

① *Brit. Assn. for Adv. of Sci.*, Rept. 3, 1833, 185~352.

么代数的型,当符号在形式上是普遍的,而在值[正整数]上是特殊的时候是等价的,则当符号在值上和形式上都是普遍的时候同样是等价的."Peacock 特地用这个原理证明用复数运算是合理的.他试图用"当符号在形式上是普遍的时候"来保护他的结论.这样就不能在符号形式中陈述特殊整数的特定性质以及坚持这些符号的陈述是普遍的.例如:复合整数分解成素数的乘积,虽然是用符号表达的,却不能作为符号代数的陈述来接受.这个原理用命令来批准经验上显然正确但尚未在逻辑上建立的东西.

Peacock 在他的《代数论著》(*Treatise on Algebra*)①的第二版中重新肯定了这个原理,但他还在那里引进了正式的代数科学,Peacock 在这本论著中叙述说,代数和几何一样,是演绎的科学.代数的步骤必须根据法则条文的一个完全的陈述,这些法则支配着步骤中用到的运算.至少对于代数这门演绎科学而言,运算的符号除了法则给以它的意义而外没有其他意义.例如加法不过是表示服从代数中加法法则的任一步骤.他的法则是,例如加法和乘法的结合律和交换律,以及如 $ac = bc$ 而 $c \neq 0$,则 $a = b$ 这个法则.

这里型的永恒性原理是从所采用的公理推出来的.这种处理方式为代数中更抽象的思想铺平了道路,尤其是影响了 Boole 关于逻辑代数的思想.

经过 19 世纪大部分时间,由 Peacock 肯定的代数观点被接受了.这个观点受到例如 Duncan F. Gregory(1813—1844)的支持,他是 17 世纪的 James Gregory 的重重孙.Gregory 在一篇文章《论符号代数的真正性质》②中写道:

> 于是,我用以考虑符号代数的见解是,它是处理运算的组合的科学,这些运算不是由它们的性质确定的,即不是由

---

① 1842~1845; 1st ed., 1830.

② *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, 14,1840,208~216.

> 它们是什么或它们做什么来确定的,而是由它们所服从的组合的法则来确定的……的确,这些法则在很多情况下已由数的许多已知运算法则提出来了(正如 Mr. Peacock 已经适当地称谓的),但是从算术代数到符号代数所取的步骤是,不考虑我们用符号所代表的运算的性质,而假设服从同样法则的一类未知运算的存在.这样我们就能够证明不同的运算类之间的某些关系,当这些运算在符号之间表达出来时,它们就称为代数定理.

在这篇文章中,Gregory 强调了交换律和分配律,这术语是由 François-Joseph Servois(1767—1847)①引进的.

代数理论作为符号及其组合法则的科学进一步由 Augustus De Morgan 推进,他写了几篇关于代数结构的文章②.他的《三角学和双重代数》(*Trigonometry and Double Algebra*, 1849)也包含着他的见解.双重代数这个词的意思是复数的代数,而单个代数是指负数.在单个代数以前是普通算术,它包括正实数的代数,De Morgan 主张代数是无意义的符号以及符号的运算的集合.符号是 0, 1, +, −, ×, ÷, ( )和文字.代数的法则就是这些符号所服从的法则,例如交换律,分配律,指数律,负数乘正数是负数, $a-a=0$, $a\div a=1$, 和一些导出法则.基本法则是任意选择的.

19 世纪中叶,普遍接受的代数公理是:

1. 等量各加上第三个量得到等量.
2. $(a+b)+c=a+(b+c)$.
3. $a+b=b+a$.
4. 等量加等量给出等量.
5. 等量加不等量给出不等量.

---

① *Ann. de Math.*, 5,1814/1815,93～140.

② *Trans. Camb. Phil. Soc.*, 1841,1842,1847.

6. $a(bc)=(ab)c$.

7. $ab=ba$.

8. $a(b+c)=ab+ac$.

型的永恒性原理就建立在这些公理上.

对于我们来说,要看出这个原理究竟是什么意思是困难的. 它把未经证明的东西作为假定来论证为什么不同类型的数具有与整数相同的性质. 但 Peacock,Gregory 和 De Morgan 企图从代数中建立一门科学,与实数和复数的性质无关,从而认为代数是不加解释的符号和它们的组合法则的科学. 实际上是要使这一假定合理化,即同样的基本性质对所有类型的数都具备. 这个基础不仅是含糊的,而且是僵硬的. 人们坚持算术代数和一般代数之间的相似性是如此僵硬以至于如果再继续下去,就要破坏代数的一般性. 他们似乎未体会到,一个公式对符号的一种解释是对的,但对另一种解释可能不对.

型的永恒性原理,是一种任意的宣言,不可能作为代数的牢固基础. 实际上,我们在这一章中将要处理的事物都伤害了它,第一步是由 Hamilton 做出的,在他把复数的逻辑建立在实数性质的基础上的时候,这第一步只是在涉及复数时避免了对这个原理的需要.

虽然在 1830 年时,复数在直观上被很好地建立了,这是通过表示成平面上的点或有向线段来建立的,但 Hamilton 关心算术的逻辑,他不满足于只是直观的基础. Hamilton 在他的文章《共轭函数及作为纯粹时间的科学的代数》①中指出,复数 $a+bi$ 不是 $2+3$ 意义上的一个真正的和,加号的使用是历史的偶然,而 bi 不能加到 a 上去. 复数 $a+bi$ 只不过是实数的有序偶 (a, b). 由 i 或 $\sqrt{-1}$ 在复数的运算中引进来的特殊性质,Hamilton 把它组织在以有序偶作运算的定义中. 例如,设 $a+bi$ 和 $c+di$ 是两个复

---

① *Trans. Royal Irish Academy*, 17,1837, 293 ~ 422 = *Math. Papers*,3,3~96.

数,则

$$(a,\ b) \pm (c,\ d) = (a \pm c,\ b \pm d),$$

$$(1) \qquad (a,\ b) \cdot (c,\ d) = (ac - bd,\ ad + bc),$$

$$\frac{(a,\ b)}{(c,\ d)} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2},\ \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right).$$

通常的结合律、交换律和分配律现在都能推导出来. 在对复数的这个看法下,不仅这些数逻辑地建立在实数的基础上,而且至今还有点神秘的$\sqrt{-1}$也完全免除了. 当然,在实践上,用 $a + bi$ 这个形式并记住$\sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1$ 还是方便的. 附带地说一下,Gauss 在 1833 年给 Wolfgang Bolyai 的一封信中确实说过,他在 1831 年就已经有了有序偶的概念. 但是 Hamilton 文章的发表才给了数学界以有序偶的概念.

2. 三维"复数"的寻找

向量的概念,即可以代表力、速度或加速度的大小和方向的有向线段的概念,平静地进入了数学. Aristotle 就知道力可以表示成向量,两个力的组合的作用可以用著名的平行四边形法则来得到,即由两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$(图 32.1)形成的平行四边形的对角线给出合力的大小和方向. Simon Stevin 在静力学问题中应用平行四边形法则,而 Galileo 清楚地叙述了这个定律.

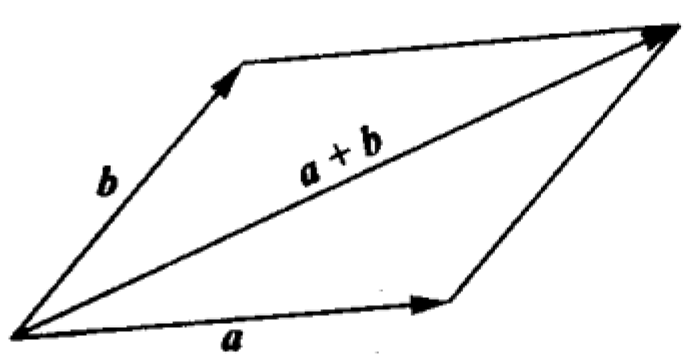


图 32.1

在稍微熟悉了由 Wessel, Argand 和 Gauss 提供的复数的几何表示之后,数学家们认识到复数能用来表示平面上的向量和研究向量. 例如,设两个向量分别由 3+2i 和 2+4i 代表,则这两个复数的和,即 5+6i 代表了用平行四边形法则相加的向量的和. 复数

对于平面向量所做的事情,就是提供了表示向量及其运算的一个代数. 人们不一定要几何地作出这些运算,但能够代数地研究它们,很像曲线的方程能用来表示曲线和研究曲线.

复数用于表示平面上的向量,在 1830 年时就是熟知的了,然而,复数的利用是受限制的. 设有几个力作用于一物体,这些力不一定在一个平面上. 代数上为了处理这些力需要复数的一个三维类似物,我们能用点的通常的笛卡儿坐标(x, y, z)来代表从原点到该点的向量,但不存在三元数组的运算来表现向量的运算. 这些运算和复数的情况一样,表面上看来必须包括加法、减法、乘法和除法,而且要服从通常的结合律、交换律和分配律,使代数的运算能自由而有效地运用. 数学家们开始寻找所谓三维的复数以及它的代数.

Wessel, Gauss, Servois, Möbius 和其他人继续研究了这个问题. Gauss① 关于空间的运算写了一篇未发表的短文(注明 1819 年). 他把复数想像为位移;$a+bi$ 是沿一固定方向移动 a 个单位,接着在一垂直方向移动 b 个单位. 由此他试图建立一个三分量的数的代数,其中第三个分量代表 $a+bi$ 平面的垂直方向上的位移. 他得到了一个非交换代数,但它不是物理学家所需要的有效的代数,而且由于未发表,这篇著作影响不大.

复数的有用的空间类似物的创造属于 William R. Hamilton (1805—1865). 仅次于 Newton, Hamilton 是最伟大的英国数学家,并且和 Newton 一样,他作为一个物理学家甚至比作为一个数学家更伟大. 5 岁时, Hamilton 就能读拉丁文、希腊文和希伯来文;8 岁时,添了意大利文和法文;10 岁时又能读阿拉伯文和梵文;而 14 岁时还能读波斯文. 同快速计算器的一次接触,激励他去研究数学. 1823 年他进了都柏林的三一学院,他是一个出色的学生. 1822 年,他 17 岁时准备了一篇关于焦散曲线的文章,1824 年在爱

① *Werke*, 8,357~362.

尔兰皇家科学院宣读,但未发表. Hamilton 被劝告去重做和发展它. 1827 年他呈送给这科学院一篇题为《光线系统的理论》的修改稿,该文建立了几何光学的科学. 这里他引进了所谓光学特征函数. 该文于 1828 年发表在《爱尔兰皇家科学院学报》上①.

1827 年,当他还是一个大学生时,就被任命为三一学院的天文教授,用此职位就赢得了爱尔兰皇家天文学家的头衔. 他作为教授的任务是演讲科学和管理天文观察. 他对后一工作没做很多事,但他是一个好教师.

从 1830 年到 1832 年他对于《光线系统的理论》发表了三个补充. 在第三篇文章②中,他指出在双轴晶体中按某一特殊方向传播的光线将产生折射光线的一个圆锥. 这个现象被他的朋友和同事 Humphrey Lloyd 用实验证实了. 后来 Hamilton 把他关于光学的思想归入到动力学中,并在动力学领域中写了两篇很著名的文章(30 章),文中他用了在光学中建立的特征函数的概念. 他还对物体系统的运动的微分方程给出了一组完全而严密的积分. 他的主要数学工作是四元数这个科目,我们将简短地讨论它. 他把他的这项工作的最后形式介绍在他的《四元数讲义》(*Lectures on Quaternions*, 1853)和死后出版的两卷《四元数基础》(*Elements of Quaternions*, 1866)中.

Hamilton 善于利用对比去从已知论证未知. 虽然他有很好的直观,但他没有伟大的思想灵感,他长期而勤奋地对特殊问题进行工作以求看出一般性的东西. 在解决许多特定的例子时他耐心而有条不紊,并且情愿作大量的计算去检查和证明一个论点. 然而,在他的出版物中,却只有推敲和压缩了的一般结果.

他笃信宗教,这方面的兴趣对他来说是最重要的. 其次是玄学(形而上学)、数学、诗、物理和一般文学. 他还写诗. 他认为,在他那

---

① *Trans. Royal Irish Academy*, 15,1828, 69 ~ 174 = *Math. Papers*,1,1~106.

② *Trans. Royal Irish Academy*, 17,1837, 1 ~ 144 = *Math. Papers*, 1,164~293.

个时代创造出的几何概念,Poncelet 和 Chasles(第 35 章)的著作中使用的无限元素和虚元素都和诗类似.虽然他是一个谦虚的人,但他承认且甚至强调,喜爱名望会推动和振奋大数学家.

Hamilton 澄清了复数的概念,这使他能更清楚地思考引进三维类似物以代表空间的向量.但是直接的效果使他的努力失望.当时数学家们所知道的全部数都具有乘法交换性,因而对于 Hamilton 来说也自然地相信他要寻找的三维或三分量的数应同样具有这个性质,同时具有实数和复数的其他性质.经过一些年的努力之后,Hamilton 发现自己被迫应作两个让步.第一个是他的新数包含四个分量,而第二个是他必须牺牲乘法交换律.两个特点对代数学都是革命性的.他称这新的数为四元数.

事后来认识,我们能看到在几何的基础上,新的"数"必须包含四个分量.把这个新数看成一个算子,期望对一个给定的向量绕空间中一给定轴进行转动并将它进行伸缩.为此目的需要两个参数(角度)来固定转动轴,需要一个参数来规定转动角度,还需要第四个参数来规定给定向量的伸长和缩短.

Hamilton 自己描述了他的四元数的发现①:

> 明天是四元数的第 15 个生日.1843 年 10 月 16 日,当我和 Lady Hamilton 步行去都柏林途中来到布鲁厄姆(Brougham)桥的时候,它们就来到了人世间,或者说出生了,发育成熟了.这就是说,此时此地我感到思想的电路接通了,而从中落下的火花就是 I, J, K 之间的基本方程;恰恰就是我此后使用它们的那个样子.我当场抽出笔记本,它还在,就将这些做了记录,同一时刻,我感到也许值得花上未来的至少 10 年(也许 15 年)的劳动.但当时已完全可以说,这是因我感觉到一个问题就在那一刻已经

① *North British Review*, 14, 1858, 57.

解决了,智力该缓口气了,它已经纠缠住我至少 15 年了.

1843 年他在爱尔兰皇家科学院会议上宣告了四元数的发明,为发展这个课题他付出了余生,并且为它写了许多文章.

3. 四元数的性质

四元数是下面形式的一个数:

$$3+2\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}, \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 起着 i 在复数中所起的作用. 实数部分(如上面的 3)称为四元数的数量部分,而其余是向量部分. 向量部分的三个系数是点 P 的笛卡儿直角坐标,而 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 是定性的单元,几何上其方向是沿着三根坐标轴. 两个四元数相等的准则是,它们的数量部分相等以及它们的 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 单元的系数分别相等. 两个四元数相加是将它们的数量部分相加,且将 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 单元的每个系数相加,以形成这些单元的新系数. 于是两个四元数的和本身也是四元数.

四元数进行乘法运算时,乘法的所有熟知的代数规则都假定有效,除了在形成单元 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 的积时,放弃了交换律,而具备下列规则:

$$\boldsymbol{jk}=\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{kj}=-\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{ki}=\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{ik}=-\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{ij}=\boldsymbol{k},\boldsymbol{ji}=-\boldsymbol{k}, \tag{3}$$
$$\boldsymbol{i}^2=\boldsymbol{j}^2=\boldsymbol{k}^2=-1.$$

例如设 $\boldsymbol{p}=3+2\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{q}=4+6\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{j}+9\boldsymbol{k}$,

则
$$\boldsymbol{pq}=(3+2\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k})(4+6\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{j}+9\boldsymbol{k})$$
$$=-111+24\boldsymbol{i}+72\boldsymbol{j}+35\boldsymbol{k},$$

而
$$\boldsymbol{qp}=(4+6\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{j}+9\boldsymbol{k})(3+2\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k})$$
$$=-111+28\boldsymbol{i}+24\boldsymbol{j}+75\boldsymbol{k}.$$

Hamilton 证明了乘法是可结合的,这是第一次使用这个术语①.

---

① *Proc. Royal Irish Academy*, 2,1844, 424 ~ 434 = *Math. Papers*, 3,111~116.

四元数被另一四元数除也能实现,但乘法不交换蕴含了用四元数 $\boldsymbol{q}$ 除四元数 $\boldsymbol{p}$,可以意味着找 $\boldsymbol{r}$ 使 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{qr}$ 或 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{rq}$. 这个商 $\boldsymbol{r}$ 在这两种情况下不必相同. 除法的问题最好通过引进 $\boldsymbol{q}^{-1}$ 或 $1/\boldsymbol{q}$ 来处理. 设 $\boldsymbol{q}=a+b\boldsymbol{i}+c\boldsymbol{j}+d\boldsymbol{k}$, 定义 $\boldsymbol{q}'$为 $a-b\boldsymbol{i}-c\boldsymbol{j}-d\boldsymbol{k}$, 并定义 $N(\boldsymbol{q})$(称为 $\boldsymbol{q}$ 的模)为 $a^2+b^2+c^2+d^2$. 于是 $N(\boldsymbol{q})=\boldsymbol{qq}'=\boldsymbol{q}'\boldsymbol{q}$. 定义 $\boldsymbol{q}^{-1}=\boldsymbol{q}'/N(\boldsymbol{q})$, 因而如 $N(\boldsymbol{q})\neq 0$, 则 $\boldsymbol{q}^{-1}$ 存在. 还有 $\boldsymbol{qq}^{-1}=1$ 和 $\boldsymbol{q}^{-1}\boldsymbol{q}=1$, 现在要找 $\boldsymbol{r}$ 使 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{qr}$, 我们就有 $\boldsymbol{q}^{-1}\boldsymbol{p}=\boldsymbol{q}^{-1}\boldsymbol{qr}$ 或 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{q}^{-1}\boldsymbol{p}$; 要找 $\boldsymbol{r}$ 使 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{rq}$, 我们就有 $\boldsymbol{pq}^{-1}=\boldsymbol{rqq}^{-1}$ 或 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{pq}^{-1}$.

立刻能表明哪个四元数能用来旋转、伸长或缩短一个给定的向量成另一个给定的向量. 我们仅需证明,能确定 a, b, c 和 d 使

$$(a+b\boldsymbol{i}+c\boldsymbol{j}+d\boldsymbol{k})(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})=x'\boldsymbol{i}+y'\boldsymbol{j}+z'\boldsymbol{k}.$$

把左边乘开成四元数并使左右两边对应系数相等,就得到未知数 a, b, c 和 d 的四个方程. 这四个方程足以确定未知数.

Hamilton 还引进了一个重要的微分算子. 符号 ∇,它是 Δ 的倒转——Hamilton 称它为"nabla",因为它像古代一个同名的希伯来乐器——代表算子

$$\nabla=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{4}$$

当应用于数量点函数 $u(x, y, z)$时,它产生向量

$$\nabla u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}. \tag{5}$$

这个向量是随着空间的点而变化的,现在称为 u 的梯度. 它代表 u 的最大的空间增长率的大小和方向.

还令 $\boldsymbol{v}=v_1\boldsymbol{i}+v_2\boldsymbol{j}+v_3\boldsymbol{k}$ 表示一个连续的向量点函数,这里 v_1, v_2, v_3 是 x, y, z 的函数, Hamilton 引进

$$\nabla\boldsymbol{v}=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(v_1\boldsymbol{i}+v_2\boldsymbol{j}+v_3\boldsymbol{k}) \tag{6}$$

$$
=-\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial v_3}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial v_3}{\partial y}-\frac{\partial v_2}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}
+\left(\frac{\partial v_1}{\partial z}-\frac{\partial v_3}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial v_2}{\partial x}-\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}.
$$

于是把∇作用到向量点函数 $\boldsymbol{v}$ 上的结果是产生一个四元数；这四元数的数量部分(除去负号)我们现在称它为 $\boldsymbol{v}$ 的散度，而向量部分称为 $\boldsymbol{v}$ 的旋度.

Hamilton 对他的四元数具有无限的热情. 他相信这个创造和微积分同等重要，将会是数学物理中的关键工具. 他自己对几何、光学和力学作了一些应用. 他的思想得到了他的朋友 Peter Guthrie Tait(1831—1901)的热情支持. Tait 是皇后学院的数学教授，后来又是爱丁堡大学的自然历史教授. Tait 在很多文章中鼓励物理学家采用四元数作为基本工具. 他甚至卷入了同 Cayley 的长期争论中，Cayley 对四元数的用途取消极观点. 但物理学家们无视四元数而继续使用方便的笛卡儿坐标来工作. 然而，正如我们将看到的，Hamilton 的工作确实间接地引向一个向量代数和向量分析，这都是物理学家们渴望采用的.

Hamilton 的四元数证明对代数学具有不可估量的重要性. 一旦数学家们体会到可以构造一个有意义的、有用的"数"系，它可以不具有实数和复数的交换性，那他们就觉得可较为自由地考虑甚至更偏离实数和复数的通常的性质的创造. 这个体会在向量代数和向量分析建立之前是必要的，因为向量比四元数违反更多的通常的代数法则(第 5 节). 更一般地，Hamilton 的工作引向线性结合代数的理论(第 6 节). Hamilton 本人开始研究包含 n 个分量或 n 元数组的超复数[①]，但是正是他的关于四元数的工作推动了线性代数的这个新研究.

---

① *Trans. Royal Irish Academy*, 21, 1848, 199 ~ 296 = *Math. Papers*, Ⅲ, 159 ~226.

4. Grassmann 的扩张的演算

正当 Hamilton 建立他的四元数时，另一个数学家 Hermann Günther Grassmann(1809—1877)，正在建立复数的一个更为大胆的推广. 他在年轻时没有表现出数学才能，并且没有受过大学的数学教育，但是后来成了德国斯德丁(Stettin)城的中学数学教师，同时又是梵文权威. Grassmann 在 Hamilton 以前就有了他的想法，但直到 1844 年，即 Hamilton 宣告他的四元数的发现后一年才发表. 那一年他发表了他的《线性扩张论》(*Die lineale Ausdehnungslehre*). 由于覆上了神秘的教义以及叙述抽象，比较关心实践的数学家和物理学家发现此书含混不清和不好读，结果这本著作虽然高度独创，但很多年仍然很少为人知道. 1862 年 Grassmann 发行了修订版，称做《扩张论》(*Die Ausdehnungslehre*). 书中，他简化和详述了原来的工作，但他的文风和有欠清楚明了仍使读者厌恶.

虽然 Grassmann 的叙述和几何概念有着几乎不可分割的联系——他实际上是在涉及 n 维几何——但我们将抽取其代数的概念，它被证明是具有永恒的价值. 他的基本概念，他称为扩张的量(*extensive Grösse*)，是一种有 n 个分量的超复数. 为研究他的思想，我们讨论 $n=3$ 的情况.

考虑两个超复数

$$\alpha=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\alpha_3e_3,\ \beta=\beta_1e_1+\beta_2e_2+\beta_3e_3,$$

这里，α_i 和 β_i 是实数，而 e_1，e_2 和 e_3 是原始的或定性的单元，几何上用单位长度的三个有向线段来代表，它们从原点出发，顺序确定一个右手直角坐标系. 这些 α_ie_i 是原始单元的倍数，且几何上由相应轴上长度 α_i 来代表，而 α 由空间中的一个有向线段来代表，它在各轴上的投影正好是长度 α_i. 同样的事对 β_i 和 β 也成立. Grass-

mann 称这样的有向线段或线向量为 Strecke(线段).

这些超复数的加减法由下式定义:

(7) $$\alpha \pm \beta = (\alpha_1 \pm \beta_1)e_1 + (\alpha_2 \pm \beta_2)e_2 + (\alpha_3 \pm \beta_3)e_3.$$

Grassmann 引进了两类乘法,内积和外积.对内积,他假设

(8) $$e_i \mid e_i = 1,\ e_i \mid e_j = 0,\ i \neq j.$$

对外积他假设

(9) $$[e_i e_j] = -[e_j e_i],\ [e_i e_i] = 0.$$

这些方括弧称为二阶单元,它们未被 Grassmann 化简成一阶单元,即 e_i(而 Hamilton 做了),而是用 $[e_1 e_2] = e_3$ 等等把它们当作好像是等价于一阶单元来处理.

从这些定义推出 α 和 β 的内积 $\alpha \mid \beta$ 由下式给定:

$$\alpha \mid \beta = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 \quad 和 \quad \alpha \mid \beta = \beta \mid \alpha.$$

一个超复数 α 的数值或大小 a 定义为 $\sqrt{\alpha \mid \alpha} = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}$. 这样,$\alpha$ 的大小在数值上就等于几何上表示它的线向量的长度.若 θ 表示线向量 α 和 β 之间的夹角,则

$$\alpha \mid \beta = ab\left(\frac{\alpha_1\beta_1}{ab} + \frac{\alpha_2\beta_2}{ab} + \frac{\alpha_3\beta_3}{ab}\right) = ab\cos\theta.$$

借助于外积规则(9),超复数 α 和 β 的外积 P 可以表示为

(10) $$\begin{aligned} P = [\alpha\ \beta] = {} & (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)[e_2 e_3] + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)[e_3 e_1] \\ & + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)[e_1 e_2]. \end{aligned}$$

这个积是二阶的超复数,并且是用二阶的独立的单元表示出来的.它的大小 $|P|$ 是借助于两个二阶超复数的内积的定义得到的,就是

(11) $$\begin{aligned} |P| &= \sqrt{P \mid P} \\ &= \{(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)^2 + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)^2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2\}^{\frac{1}{2}} \\ &= ab\left\{1 - \left(\frac{\alpha_1\beta_1}{ab} + \frac{\alpha_2\beta_2}{ab} + \frac{\alpha_3\beta_3}{ab}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} = ab\sin\theta. \end{aligned}$$

因此,外积 $[\alpha\beta]$ 的大小 $|P|$ 就在几何上被表示成一个平行四边形的面积,这个平行四边形是由几何上代表 α 和 β 的线向量构成的.

这个面积，连同和它垂直的一个单位线向量一起，就是现在所称的向量面积，那个单位线向量的方向要选择成当 α 绕此线向量转到 β 时，它的方向将指向从 α 转到 β 的右手螺旋方向. Grassmann 的术语是 Plangrösse(平面量).

两个初始的三维超复数的 Grassmann 内积等价于两个向量的 Hamilton 的四元数乘积的数量部分的负值；在三维情况下，当我们用 e_1 代替 $[e_2e_3]$ 等等，Grassmann 外积就正好是两个向量的 Hamilton 的四元数乘积. 然而，在四元数理论中，向量是四元数的辅助部分，而在 Grassmann 代数中向量是作为基本的量出现的.

Grassmann 的另外一种乘积是这样形成的，将一个超复数 γ 同两个超复数 α 和 β 的外积 $[\alpha\beta]$ 作内积，这个积在三维的情形是

$$\begin{aligned} Q &= [\alpha\ \beta]\gamma \\ &= (\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)\gamma_1+(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)\gamma_2+(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)\gamma_3. \end{aligned}$$

表成行列式形状就是

$$Q=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{vmatrix}. \tag{12}$$

结果，Q 能够几何地解释成由 α，β 和 γ 的线向量构成的平行六面体的体积. 这个体积可正可负.

Grassmann 不仅考虑了(对 n 分量超复数)上面所说的两种乘积，而且还考虑了高阶乘积. 在 1855 年的一篇文章①中，他对超复数给出了 16 种不同类型的乘积. 他还给出了这些乘积的几何意义，并对力学、磁学、晶体学作了应用.

初看起来，Grassmann 关于有 n 个部分的超复数的讨论似乎是不必要的一般，因为至少到目前为止超复数的有用的例子最多

---

① *Jour. für Math.*, 49, 1855, 10～20 与 123 ～ 141 = *Ges. Math. und Phys. Werke*, 2, Part Ⅰ, 199～217.

包含四个部分.可是 Grassmann 的思想却有助于引导数学家们进入张量理论(第48章),因为正如我们将要看到的,张量就是超复数.其他几何的和不变性的概念在张量来到以前就已闻名于数学界了.虽然关于超复数的思想引向了各种推广,但 Grassmann 的 n 维超复数的分析(例如微积分)终究未建立起来.理由是简单的,即没有发现这样的分析的应用.正如我们将要看到的,对张量有一个扩张的分析,但是这些在 Riemann 几何中有它们的来源.

5. 从四元数到向量

Grassmann 的工作暂时仍被忽视,但正如我们已指出的,四元数几乎立刻就吸引了很大的注意力,然而它们完全不是物理学家所要的东西.他们要寻找一个概念,它不脱离笛卡儿坐标,而是比四元数更紧密地联系于笛卡儿坐标.在这样一种概念的方向上,第一步是 James Clerk Maxwell(1831—1879)做的,他是电磁理论的发现者,最伟大的数学物理学家之一,是剑桥大学的物理教授.

Maxwell 知道 Hamilton 的工作;他虽然听到过 Grassmann 的工作,但未看到过.他区分出 Hamilton 的四元数的数量部分和向量部分,并且把重点放在这些分开来的概念上①.然而,在他的有名的《论电和磁》(*A Treatise on Electricity and Magnetism*, 1873)中,他对四元数作了较大的让步,并且更多地谈到四元数的数量部分和向量部分,虽然他是把这些部分作为分开的实体处理的.他说(p. 10),要规定一个向量需用三个量(分量),这三个量能解释成沿三个坐标轴的长度.这个向量概念是 Hamilton 的四元数的向量部分,Maxwell 就是这样说的. Hamilton 曾引入 x, y 和

① *Proc. London Math. Soc.*, 3, 1871, 224~232 = *The Scientific Papers*, Vol. 2, 257~266.

z 的向量函数 $\boldsymbol{v}$，其分量为 v_1，v_2 和 v_3，并对它应用算子 $\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$ 而得到结果(6)．这样，$\nabla\ \boldsymbol{v}$ 是一个四元数．但 Maxwell 把数量部分和向量部分分开，并用 $S\ \nabla\ \boldsymbol{v}$($\nabla\ \boldsymbol{v}$ 的数量部分)和 $V\ \nabla\ \boldsymbol{v}$($\nabla\ \boldsymbol{v}$ 的向量部分)表示．他称 $S\ \nabla\ \boldsymbol{v}$ 为 $\boldsymbol{v}$ 的聚度，因为这个表达式在流体动力学中出现过多次，并且当 $\boldsymbol{v}$ 是速度时它有通量的意义，或每单位时间内通过包围一点的一块小面积的每单位体积所含的纯流量．他又称 $V\ \nabla\ \boldsymbol{v}$ 为 $\boldsymbol{v}$ 的旋转或旋度，因为这个表达式在流体动力学中也已出现过，它是流体在一点的旋转率的两倍，Clifford 后来称 $-S\ \nabla\ \boldsymbol{v}$ 为散度．

然后 Maxwell 指出，算子 ∇ 重复进行就给出

$$\nabla^2 = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

他称这算子为 Laplace 算子．他允许这算子作用于数量函数以产生一个数量，作用于向量函数产生一个向量①．

Maxwell 在他 1871 年的文章中说明了一个数量函数的梯度的旋度和向量函数的旋度的散度永远是零．他还说，一个向量函数 $\boldsymbol{v}$ 的旋度的旋度是 $\boldsymbol{v}$ 的散度的梯度减去 $\boldsymbol{v}$ 的 Laplace 算子(这仅在直角坐标中成立)．

Maxwell 经常用四元数作为基本的数学实体，或至少经常提到四元数，也许是为了帮助他的读者．然而他的工作清楚地表明，向量是物理思想的真正的工具，而不像某些人所主张的那样，仅仅是书写的缩减方案．于是在 Maxwell 所处的时代，由于分开处理

---

① 因为在向量分析中 $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$，于是 $\nabla^2 q$ 在物理上表示梯度的散度，或 q 的最大空间变化率的散度．然而这个物理意义从下述事实来看更为明显，即满足 $\nabla^2 q = 0$ 的函数 q 使 Dirichlet 积分取最小值(看第 28 章的(34))．这个积分是遍布于某个体积上的梯度量的平方．因此 $\nabla^2 q = 0$ 或者意味着极小梯度发生在任何一点，或者意味着偏离均匀度的差是一个极小值．如果 $\nabla^2 q$ 不是 0，就必定存在某个偏离均匀度的差，因而将有一个恢复力．在数学物理中，包含 $\nabla^2 q$ 的这个或那个内容的各种方程实际上都是断言：自然界的行为永远是要恢复均匀．

代替 ∇^2 的记号 Δ 是 Robert Murphy 在 1833 年引进的．

四元数的数量部分和向量部分,而创造了大量的向量分析.

一个新的独立的课题,三维向量分析的开创,以及同四元数的正式分裂,在 19 世纪 80 年代初期由 Josiah Willard Gibbs 和 Oliver Heaviside 所独立建立. Gibbs(1839—1903)是耶鲁(Yale)学院的数学物理教授,最初是物理化学家,曾在他的学生中私人传播过小册子(1881 和 1884)《向量分析基础》(*Elements of Vector Analysis*)①. 在介绍性的说明中叙述了他的观点:

> 下述分析的一些基本原理都是在稍微不同的形式下为四元数的学生们所熟悉的. 建立这一课题的方法与处理四元数的方法有些不同,只是给出一个适当的记法来表达向量之间或向量与数量之间的那些关系,这个记法看来是非常重要的,它非常容易地引导到解析变换,并阐明一些这样的变换. 作为不同于四元数处理的先例可以引用 Clifford 的《静力学》(*Kinematics*). 在这方面还应提到 Grassmann 这个名字,下述方法与他的系统的联系,在某些方面要比与 Hamilton 系统的联系更紧密.

Gibbs 关于向量分析的小册子虽然是为私人交流而印刷的,但却变成广为知道的书. 这个材料最后被编进了 E. B. Wilson 所写的书中,他根据于 Gibbs 的讲义. 这本书,Gibbs 和 Wilson 的《向量分析》(*Vector Analysis*),出现于 1901 年.

Oliver Heaviside(1850—1925)早期的科学经历是电报和电话工程师. 他在 1874 年隐退到乡村生活,专心于写作,主要是写电学和磁学的课题. Heaviside 曾从 Hamilton 的《基础》学过四元数,但受阻于很多特殊的定理. 他感到学习四元数对一个忙碌的工程师是太难了,因此他建立他的向量分析,对他来说,这不过是通常笛卡儿坐标的速记形式. 19 世纪 80 年代,他

---

① *The Scientific Papers*, 2,17～90.

在杂志《电学家》(*Electrician*)上写的文章中自由地运用了这个向量分析. 后来在他的三卷著作《电磁理论》(*Electromagnetic Theory*, 1893, 1899, 1912)的第一卷中给出向量代数的很多内容. 第三章约 175 页专门用于向量方法. 他对这个课题的发展结果本质上与 Gibbs 的相融合,虽然他不喜欢 Gibbs 的记法,而采取了他自己的记法,这根据于 Tait 的四元数的记法.

按照 Gibbs 和 Heaviside 所提出的,一个向量不过是四元数的向量部分,但独立于任何四元数. 这样,向量 $\boldsymbol{v}$ 是

$$\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k},$$

这里,$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 分别是沿 x, y, z 轴的单位向量,系数 a,b 和 c 是实数,称为分量. 两个向量是相等的,如果相应的分量都相等;两个向量的和是一个向量,其各分量分别是被加项的相应分量之和.

引进了两种类型的乘法,两者都对物理有用. 第一种类型称为数量乘法,是这样定义的:把 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{v}' = a'\boldsymbol{i} + b'\boldsymbol{j} + c'\boldsymbol{k}$ 像通常的多项式一样相乘,用“点”作为乘法的符号,令

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = 1, \tag{13a}$$

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j} = 0.$$

这样,$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}' = aa' + bb' + cc'$. 这个乘积不再是向量而是一个实数或数量,称为数量积. 它具有新的代数特点,因为两个实数或复数或四元数的积,永远是我们所从出发的同一类数. 数量积的另一奇怪性质是当两个因子没有一个是零时它可以是零. 例如向量 $\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{v}' = 6\boldsymbol{j} + 7\boldsymbol{k}$ 的积就是零.

两个向量的数量积在代数上新奇的还有另一方面——它不允许逆过程. 就是说,永远不能找到一个向量或数量 q 使 $\boldsymbol{v}/\boldsymbol{v}' = q$. 比如说,假如 $\boldsymbol{q}$ 是一个向量,$\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{v}'$就会是一个数量,因而不等于向量 $\boldsymbol{v}$. 另一方面,假如 q 是一个数量,则虽然 $q\boldsymbol{v}$ 是定义成 $qa'\boldsymbol{i} + qb'\boldsymbol{j} + qc'\boldsymbol{k}$,却很少有 $qa' = a$, $qb' = b$ 及 $qc' = c$,这里 a, b 和 c 是 $\boldsymbol{v}$ 的系数. 尽管缺乏商,数量积仍是有用的.

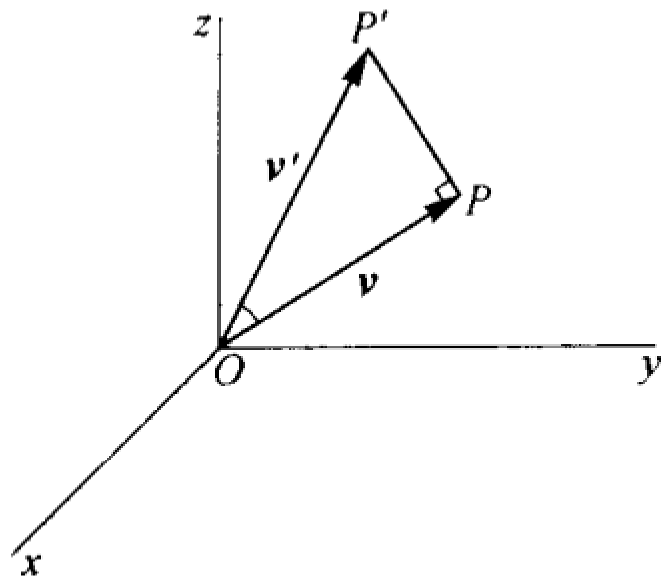


图 32.2

数量积的物理意义直接显示如下:设 $\boldsymbol{v}'$ 是一个力(图 32.2),它的方向和大小用由 O 到 P' 的线段表示,则这个力推动 O 点的物体在一个方向(比如说在 OP 方向)上的效应(这里 OP 代表向量 $\boldsymbol{v}$),是 OP' 在 OP 上的投影或 $OP'\cos\phi$,这里 ϕ 是 OP' 和 OP 间的夹角. 当 OP 是单位长度时,OP' 的投影正好是乘积 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}'$ 的值.

向量的第二类型的乘积,称为向量积,定义如下:我们仍像多项式一样将 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{v}'$ 相乘,但这时令

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=0,$$

$$\text{(13b)}\qquad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},$$

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}.$$

于是这乘积,用 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}'$ 表示,便是

$$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}'=(bc'-b'c)\boldsymbol{i}+(ca'-ac')\boldsymbol{j}+(ab'-b'a)\boldsymbol{k}.$$

两个向量的向量积是一个向量,不难证明它的方向是垂直于 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{v}'$ 的方向,且指向是当 $\boldsymbol{v}$ 通过较小的角度转到 $\boldsymbol{v}'$ 时右手螺旋所指的方向. 两个平行向量的向量积是零,虽然没有一个因子是零. 此外,这乘积像四元数乘积一样不可交换. 进一步,它甚至不是结合的,例如,$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}$ 可以表示 $(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i}$ 或 $\boldsymbol{i}\times(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})=\boldsymbol{i}\times 0=0$.

向量乘法没有逆,因为如果 $\boldsymbol{v}$ 用 $\boldsymbol{v}'$ 除的商是一个向量 $\boldsymbol{q}$,我们就必然会有

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'\times\boldsymbol{q}.$$

而无论 $\boldsymbol{q}$ 是什么,这都需要 $\boldsymbol{v}'$ 垂直于 $\boldsymbol{v}$,但这可能不是出发时的情况. 假如 q 是一个数量,那么偶然才会有 $qa'\boldsymbol{i}+qb'\boldsymbol{j}+qc'\boldsymbol{k}$ 等

于 $\boldsymbol{v}$.

像数量积一样,向量积是由物理情况提出的. 设图 32.3 中的 OP 和 PP'是 $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{v}'$的长度和方向. 设 $\boldsymbol{v}'$是一个力,它的大小和方向同 PP'的一样,力 $\boldsymbol{v}'$绕 O 的力矩的量度是 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}'$ 的长度,其方向通常取 $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{v}'$ 的方向.

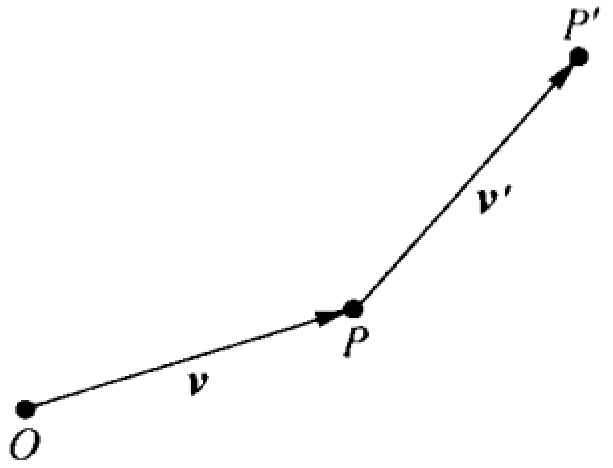


图 32.3

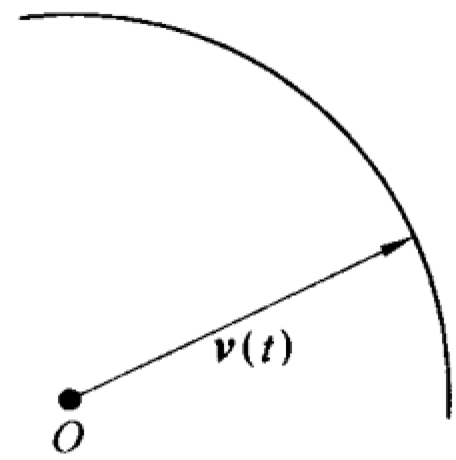


图 32.4

向量代数被推广到变向量和向量微积分. 例如,变向量 $\boldsymbol{v}(t) = a(t)\boldsymbol{i} + b(t)\boldsymbol{j} + c(t)\boldsymbol{k}$ 是一个向量函数,这里 $a(t)$, $b(t)$和 $c(t)$ 都是 t 的函数. 由 t 的不同值得到的各向量,如果都以 O 作为原点画出来(图 32.4),则这些向量的终点描出一条曲线. 因此数量变量 t 的向量函数所起的作用类似于通常的函数,比如说,

$$y = x^2 + 7,$$

对这些向量函数建立的向量微积分完全和通常函数的一样.

梯度 u 的概念,

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}, \tag{14}$$

这里 u 是 x, y 和 z 的一个数量函数,向量函数 $\boldsymbol{v}$ 的散度为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}, \tag{15}$$

这里 v_1, v_2 和 v_3 是 $\boldsymbol{v}$ 的分量. $\boldsymbol{v}$ 的旋度为

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}, \tag{16}$$

都从四元数抽象出来.

分析的很多基本定理能用向量形式表示.例如在求解热的偏微分方程的过程中,Ostrogradsky[①]利用了体积分到曲面积分的下列转换:

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_S (P\cos\lambda+Q\cos\mu+R\cos\nu)\mathrm{d}S,$$

这里 P, Q, R 都是 x, y 和 z 的函数,并且都是一个向量的分量,而 λ, μ 和 ν 是曲面 S 的法线的方向余弦,S'是在左边积分中的立体 V 的边界.这个定理称为散度定理(也称 Gauss 定理和 Ostrogradsky 定理),它能表成向量形式:设 $\boldsymbol{F}$ 是向量,它的分量是 P, Q, R,而 $\boldsymbol{n}$ 是 S 的法线方向,则

$$\iiint \nabla\cdot\boldsymbol{F}\mathrm{d}V=\iint \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S. \tag{17}$$

同 Stokes 的定理(它是 1854 年[②]剑桥大学作为 Smith 奖的一次考试的题目,由他首先叙述)一样,用数量形式表述为

$$\iint\limits_S\left\{\lambda\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+\mu\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+\nu\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right\}\mathrm{d}S$$
$$=\int_C\left(P\frac{\partial x}{\partial s}+Q\frac{\partial y}{\partial s}+R\frac{\partial z}{\partial s}\right)\mathrm{d}s,$$

这里 S 是曲面的任一部分,C 是 S 的边界曲线,而 $x(s)$, $y(s)$和 $z(s)$是 C 的参数表示式.用向量形式,Stokes 定理可写成

$$\iint \mathrm{curl}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\int\boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s, \tag{18}$$

这里 $\boldsymbol{r}(s)$是向量,它的分量是 $x(s)$, $y(s)$和 $z(s)$.

当 Maxwell 写出电磁学的一些表达式和方程,特别是现在以他命名的方程时,他常常把 grad $\boldsymbol{u}$, div $\boldsymbol{v}$ 和 curl $\boldsymbol{v}$ 中涉及的向量的分量写出来.然而 Heaviside 把 Maxwell 方程写成向量形式(第

---

① *Mém. Acad. Sci. St. Peters.*, (6),1,1831,39~53.

② 此定理是 Lord Kelvin 1850 年 7 月在给 Stokes 的一封信中叙述的.

28 章(52)).

的确,向量和向量函数的演算通常是依靠笛卡儿分量来做的,但特别重要的是还要用向量作为单独的实体来思考,用梯度、散度和旋度来思考.这些都有直接的物理意义,更不必说有如下的事实,复杂的技术步骤能直接用向量来实现,如像人们把 $\nabla\cdot(\boldsymbol{u}(x, y, z)\times\boldsymbol{v}(x, y, z))$ 换成它的等价的式子 $\boldsymbol{v}\cdot\nabla\times\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}\cdot\nabla\times\boldsymbol{v}$ 一样.还有,梯度、散度和旋度的积分已被定义,这些定义使这些概念与任何坐标定义无关.这样,代替(14)我们有,例如

$$\operatorname{grad} u=\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{1}{\Delta\tau}\int_S u\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S,$$

这里 S 是体积元 $\Delta\tau$ 的边界,而 $\boldsymbol{n}$ 是 S 的曲面元 $\mathrm{d}S$ 的法线.

正当向量分析创立的时候及其后,在四元数的拥护者和向量的拥护者之间对究竟哪一个更为有用的问题有很多争论.四元数主义者迷信四元数的价值,而向量分析的提倡者同样是派性的人.一方在 Tait 这些四元数的领头的支持者们之下结成联盟,另一方是结盟于 Gibbs 和 Heaviside 之下.关于争论,Heaviside 讽刺地评论说,对四元数的处理,四元数是最好的工具.而 Tait 则描述 Heaviside 的向量分析为"组合了 Grassmann 和 Hamilton 的记法的一种阴阳怪物."Gibbs 的书在促进向量的产生方面证明有不可估量的价值.

这争论最后以有利于向量而解决了.工程师欢迎 Gibbs 和 Heaviside 的向量分析,虽然数学家们不是这样.20 世纪开始时,物理学家也完全信服向量分析是他们所要的东西.有关这课题的教科书立刻在所有国家出现,而且现在是标准化的了.最后,数学家们也跟着适应了,并把向量方法引进到分析和解析几何中来.

应当指出物理学对促进创立这样的数学对象,如四元数、Grassmann 超复数和向量的影响,这些创造变成数学的一部分,但它们的意义远远超出这些新课题的添加.这几种量的引进揭开了

新的数学前景——不是只有一个实数和复数的代数,而是有很多个不相同的代数.

6. 线性结合代数

从纯粹代数的观点看,四元数是令人兴奋的,因为它提供了一个除了乘法的交换性而外具有实数和复数性质的代数的例子. 19 世纪后半期,为了看到能创造出些什么样的变种,同时又要保持实数和复数的许多性质,许多超复数系统被大量探索出来了.

Cayley① 给出了实四元数的一个八单元推广,他的单元是 1, $e_1, e_2, \cdots, e_7$,具有性质

$$e_i^2=-1,\ e_ie_j=-e_je_i,\ j=1,2,\cdots,7\text{ 且 }i\neq j,$$

$$e_1e_2=e_3,\ e_1e_4=e_5,\ e_1e_6=e_7,\ e_2e_5=e_7,\ e_2e_4=-e_6,$$

$$e_3e_4=e_7,\ e_3e_5=e_6,$$

以及对三足标的每一个集合循环地进行排列,从这后 7 个方程得到的 14 个方程,例如 $e_2e_3=e_1$; $e_3e_1=e_2$.

一个一般的(八元数)数 x 定义为

$$x=x_0+x_1e_1+\cdots+x_7e_7,$$

这里 x_i 是实数. x 的模 $N(x)$ 定义为

$$N(x)=x_0^2+x_1^2+\cdots+x_7^2.$$

积的模等于模的积. 乘法的结合律一般不成立(和乘法的交换律一样). 右除及左除,除去用零除以外,总是可能的并且是唯一的. 这件事 Cayley 没注意到,而是由 Leonard Eugene Dickson②证明的. Cayley 在以后的文章中给出了另外的超复数的代数,和上面的一个有些不同.

---

① *Phil. Mag.*, (3),26,1845,210～213 和 30,1847,257～258 = *Coll. Math. Papers*, 1, 127 和 301.

② *Amer. Math. Soc. Trans.*, 13,1912,59～73.

Hamilton 在他的《四元数讲义》① 中还引进了拟四元数，即带有复系数的四元数．他指出乘积定律对这些拟四元数不成立；即两个非零的拟四元数相乘可以为零．

伦敦的大学学院的数学和力学教授 William Kingdon Clifford(1845—1879)，创立了另一类型的超复数②，他也称之为拟四元数．设 q 和 Q 是实四元数，又设 ω 满足 $\omega^2=1$，且 ω 与每个实四元数交换，则 $q+\omega Q$ 是一拟四元数．Clifford 的拟四元数满足乘法的乘积定律，但这乘法不是结合的．Clifford 在后来的工作中引进了以他的名字命名的代数．Clifford 代数具有单元 1，e_1，e_2，$\cdots$，e_{n-1}，每个单元的平方满足 $e_i^2=-1$ 而 $e_ie_j=-e_je_i(i\neq j)$．两个或多个单元的每一乘积是一个新的单元，所以有 2^n 个不同的单元．所有乘积是可结合的，一个型就是一个数量乘上一个单元，而一个代数就由型的和与积生成．

新的超复数系统继续涌现，种类是大量的．哈佛大学数学教授 Benjamin Peirce(1809—1880)在一篇 1870 年宣读而在 1871 年③以石印形式发表的文章《线性结合代数》中定义并给出一份当时已经知道的线性结合代数概要．线性这个词意味着任何两个原始单元的积可化简成这些单元之一，就像四元数中 $\boldsymbol{i}$ 乘 $\boldsymbol{j}$ 用 $\boldsymbol{k}$ 代替一样，而结合这个词意味着乘法是结合的．在这些代数中，加法具有实数和复数的通常性质．在这篇文章中 Peirce 引进了幂零元的概念，即元素 A 对某正整数 n 满足 $A^n=0$，也引进了幂等元的概念，即元素 A 对某个 n 满足 $A^n=A$．他还证明了：一个代数如果在其中至少有一个非幂零元，则必具有一个幂等元．

就在数学家们创立特定的代数的同一期间，在各种这样的代数中能有多大自由度的问题也已经出现在他们面前．Gauss 深信

① 1853, p. 650.

② *Proc. Lond. Math. Soc.*, 4, 1873, 381～395 = *Coll. Math. Papers*, 181～200 与 *Amer. Jour. of Math.*, 1, 1878, 350～358 = *Coll. Math.*, *Papers*, 266～276.

③ *Amer. Jour. of Math.*, 4, 1881, 97～229.

(*Werke*. 2,178),保持复数基本性质的复数的扩张是不可能的.有意义的是,当 Hamilton 找寻一个三维的代数来表达空间的向量而建立了没有交换性的四元数时,他不能证明三维交换代数不存在. Grassmann 也没有这样一个证明.

在这个世纪的后期,精确的定理才建立起来. 1878 年, F. Georg Frobenius(1849—1917)[①]证明了:具有有限个原始单元的,有乘法单位元素的实系数(原始单元的)线性结合代数,如服从结合律,那就只有实数、复数和实四元数的代数.这个定理也由 Charles Sanders Peirce(1839—1914)在他父亲的文章的附录[②]中独立地加以证明. Weierstrass1861 年得到另一关键结果:有有限个原始单元的,实或复系数(原始单元的)线性结合代数,如服从乘积定律和乘法交换律,就是实数的代数和复数的代数.大约 1870 年 Dedekind 获得了同样的结果. Weierstrass 的结果发表于 1884 年[③]而 Dedekind 发表在下一年[④].

1898 年 Adolf Hurwitz(1859—1919)[⑤]证明了实数、复数、实四元数和 Clifford 拟四元数是仅有的满足乘法定律的线性结合代数.

·这些定理是有价值的,因为它们告诉我们,在推广复数系统时,如果我们希望至少保持它的某些代数性质,那么我们能期望得到什么结果.如果 Hamilton 知道这些定理的话,他就会节省找寻三维向量代数的好些年劳动.

---

① *Jour. für Math.*, 84,1878,1～63 = *Ges. Abh.*, 1,343～405.

② *Amer. Jour. of Math.*, 4,1881,225～229.

③ *Nachrichten König. Ges. der Wiss. zu Gött.*, 1884,395～410 = *Math. Werke*, 2, 311～332.

④ *Nachrichten König. Ges. der Wiss. zu Gött.*, 1885,141～159 与 1887,1～7 = *Werke*, 2, 1～27.

⑤ *Nachrichten König. Ges. der Wiss. zu Gött.*, 1898,309～316 = *Math. Werke*, 2, 565～571.

具有有限个或甚至无限个生成(原始)单元以及具有或不具有除法的线性代数的研究,几乎到 20 世纪还继续成为一个活跃的课题,如 Leonard Eugene Dickson 和 J. H. M. Wedderburn 那样的人对这个课题作了许多贡献.

参 考 书 目

Clifford, W. K.: *Collected Mathematical Papers* (1882), Chelsea (reprint), 1968.

Collins, Joseph V.: "An Elementary Exposition of Grassmann's *Ausdehnungslehre*", *Amer. Math. Monthly*, 6, 1899, several parts; and 7, 1900, several parts.

Coolidge, Julian L.: *A History of Geometrical Methods*, Dover (reprint), 1963, pp. 252~264.

Crowe, Michael J.: *A History of Vector Analysis*, University of Notre Dame Press, 1967.

Dickson, Leonard E.: *Linear Algebras*, Cambridge University Press, 1914.

Gibbs, Josiah W., and E. B. Wilson: *Vector Analysis* (1901), Dover (reprint), 1960.

Grassmann, H. G.: *Die lineale Ausdehnungslehre* (1844), Chelsea (reprint), 1969.

Grassmann, H. G.: *Gesammelte mathematische und physikalische Werke*, 3 vols., B. G. Teubner, 1894~1911; Vol. 1, Part Ⅰ, 1~319 contains *Die lineale Ausdehnungslehre*; Vol. 1, Part Ⅱ, 1~383 contains *Die Ausdehnungslehre*.

Graves, R. P.: *Life of Sir William Rowan Hamilton*, 3 vols., Longmans Green, 1882~1889.

Hamilton, Sir Wm. R.: *Elements of Quaternions*, 2 vols., 1866, 2nd ed., 1899~1901, Chelsea (reprint), 1969.

Hamilton, Sir Wm. R.: *Mathematical Papers*, Cambridge University Press, 1967, Vol. 3.

Hamilton, Sir Wm. R.: "Papers in Memory of Sir William R. Hamilton", *Scripta Math.*, 1945; also in *Scripta Math.*, 10, 1944, 9~80.

Heaviside, Oliver: *Electromagnetic Theory*, Dover (reprint), 1950, Vol. 1.

Klein, Felix: *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, Chelsea (reprint), 1950, Vol. 1, pp. 167~191; Vol. 2, pp. 2~12.

Maxwell, James Clerk: *The Scientific Papers*, 2 vols., Dover (reprint), 1965.

Peacock, George: "Report on the Recent Progress and Present State of Certain Branches of Analysis", *British Assn. for Advancement of Science Report for* 1833, London, 1834.

Peacock, George: *A Treatise on Algebra*, 2 vols., 2nd ed., Cambridge University Press, 1845; Scripta Mathematica (reprint), 1940.

Shaw, James B.: *Synopsis of Linear Associative Algebra*, Carnegie Institution of Washington, 1907.

Smith, David Eugene: *A Source Book in Mathematics*, Dover (reprint), 1959, Vol. 2, pp. 677～696.

Study, E.: "Theorie der gemeinen und höheren complexen Grössen", *Encyk. der Math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1898. Ⅰ. 147～183.

第 33 章

行列式和矩阵

> 这就是结构好的语言的好处，它的简化的记法常常是深奥理论的源泉.
>
> P. S. Laplace

1. 引　　言

虽然行列式和矩阵在 19 世纪受到很大的注意，而且写了成千篇关于这两个课题的文章，但它们在数学上并不是大的改革. 向量的概念，从数学的观点来看不过是有序三元数组的一个集合，然而它以力或速度作为直接的物理意义，并且数学上用它能立刻写出物理上所说的事情. 向量用于梯度、散度、旋度就更有说服力. 同样，虽然 dy/dx 在数学上不过是一个符号，表示包括 $\Delta y/\Delta x$ 的极限的长式子，但导数本身是一个强有力的概念，能使我们直接而创造性地想象物理上发生的事情. 因此，虽然表面上看，数学不过是一种语言或速记，但它的大多数生动的概念能对新的思想领域提供钥匙. 相反地，行列式和矩阵却完全是语言上的改革. 对于已经以较扩展的形式存在的概念，它们是速记的表达式. 它们本身不能直接说出方程或变换所没有说出的任何东西，当然，方程和变换的表达方式是冗长的. 尽管行列式和矩阵用作紧凑的表达式，尽管矩阵在领悟群论的一般定理方面具有作为具体的群的启发作用，但它们都没有深刻地影响数学的进程. 然而已经证明这两个概念是高度有用的工具，现在是数学器具的一部分.

2. 行列式的一些新应用

行列式出现于线性方程组的求解(第25章第3节). 这个问题和消元法、坐标变换、多重积分中的变数替换、解行星运动的微分方程组、将三个或多个变数的二次型及二次型束(一个束是 $A+\lambda B$, 这里 A, B 是指定的型,而 λ 是参数)化简成标准型,全都引起行列式的各种新应用. 19世纪的工作直接继承于 Cramer, Bezout, Vandermonde, Lagrange 和 Laplace 的工作.

行列式这个词(Gauss 用以指二次型 $ax^2+2bxy+cy^2$ 的判别式)是 Cauchy 把它用于已经出现在18世纪著作中的行列式的. 把元素排成方阵并采用双重足标的记法也是属于他的.① 例如一个三阶的行列式写成(两条竖线是 Cayley 在1841年引进的)

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

在这篇文章中,Cauchy 给出了行列式的第一个系统的、几乎是近代的处理. 主要结果之一是行列式的乘法定理. Lagrange② 已经对三阶行列式给出了这个定理,但因为他的行列式的行是一个四面体的顶点的坐标,他未被引向普遍化. 按 Cauchy 的说法(用现代记号表达),一般定理为

$$(2)\qquad |a_{ij}|\,|b_{ij}|=|c_{ij}|,$$

这里 $|a_{ij}|$ 和 $|b_{ij}|$ 代表 n 阶行列式,而 $c_{ij}=\sum_k a_{ik}b_{kj}$. 就是说,在乘积的第 i 行第 j 列的项是 $|a_{ij}|$ 的第 i 行和 $|b_{ij}|$ 的第 j 列的对应元素的乘积之和. 这个定理在1812年曾由 Jacques P. M. Binet (1786—1856)叙述过但没有令人满意的证明③. Cauchy 还改进了

① *Jour. de l' Ecole Poly.*, 10,1815,29～112 = *Œuvres*, (2),1,91～169.

② *Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1773,85～128 = *Œuvres*, 3,577～616.

③ *Jour. de l'Ecole Poly.*, 9,1813,280～302.

Laplace 行列式展开定理,并给了一个证明(第 25 章第 3 节).

Heinrich F. Scherk(1798—1885)在他的《数学论文》(*Mathematische Abhandlungen*, 1825)中给出了行列式的几个新的性质.他建立了只有一行(或列)不同的两个行列式相加的规则和一常数乘行列式的规则.他还叙述了,当一个方阵的某一行是另两行或几行的线性组合时,其行列式为零,以及三角行列式(主对角线以上或以下的所有元素是零)的值是主对角线上的元素的乘积.

在 50 多年内行列式理论的始终不渝的作者之一是 James Joseph Sylvester(1814—1897).在赢得剑桥大学数学荣誉会考一等第二名后,他仍然被禁止在剑桥大学任教,因为他是犹太人.从 1841 年起到 1845 年,他是弗吉尼亚(Virginia)大学的教授.后来他回到伦敦,并从 1845 年起到 1855 年担任书记官和律师,他接受了在英格兰伍尔芝(Woolwich)军事科学院的比较低的教授职位,并在那里任职到 1871 年.经过一些年的多方活动以后成为霍普金斯(Hopkins)大学的教授,在那里自 1876 年起演讲不变量理论,他开创了合众国的纯数学的研究,并创办了《美国数学杂志》.1884 年他回到英格兰,70 岁时成为牛津大学教授,并保持职位到去世.

Sylvester 是一个活泼、敏感、兴奋、热情甚至容易激动的人.他的谈话是出色而机敏的,他用火一般的热情介绍他的思想.在他的文章中,他使用热烈的语言.他引进了很多新术语,开玩笑地把自己比做 Adam(Adam 曾给野兽和花起名字).虽然他同力学和不变量理论等许多不同的领域相联系,但他不爱好系统而彻底地做出理论.实际上他频繁地发表猜想,虽然其中许多是出色的,但其余的是不正确的.他忧伤地承认,他的大陆的朋友们"在损害他的判断力的条件下恭维他的预见力".他的主要贡献是组合的思想和从较具体的发展中进行抽象.

Sylvester 的重要成就之一是改进了从一个 n 次的和一个 m

次的多项式中消去 x 的方法，他称这为析配消元法(dialytic method)①. 例如，为消去方程

$$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0,$$

$$b_0x^2+b_1x+b_2=0$$

中的 x，他形成五阶行列式

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

这个行列式为零是这两个方程有公共根的必要充分条件. Sylvester 没有给出证明. 这方法，如 Cauchy 所证明的②，引导到 Euler 和 Bezout 方法的同样结果.

当行列式的元素是 t 的函数时，它的导数的公式首先由 Jacobi 在 1841 年给出③. 设 a_{ij} 是 t 的函数，A_{ij} 是 a_{ij} 的余子式，D 是行列式，则

$$\frac{\partial D}{\partial a_{ij}}=A_{ij},$$

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}=\sum_{i,j}A_{ij}a'_{ij},$$

这里撇表示对 t 的微商.

行列式被应用到另一方面，即应用到多重积分的变数替换中. 首先由 Jacobi(1832 和 1833 年)找到一些特殊的结果. 后来 Eugène Charles Catalan(1814—1894)在 1839 年④给出今天大学生

① *Phil. Mag.*, 16, 1840, 132～135 和 21, 1842, 534～539 = *Coll. Math. Papers*, 1, 54～57 和 86～90.

② *Exercices d'analyse et de physique mathématique*, 1, 1840, 385～422 = *Œuvres*, (2), 11, 466～509.

③ *Jour. für Math.*, 22, 1841, 285～318 = *Werke*, 3, 355～392.

④ *Mémoires, couronnés par l'Academie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles*, 14, 1841.

所熟悉的结果. 例如二重积分

$$\iint F(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{4}$$

在变数替换

$$x = f(u, v),\ y = g(u, v) \tag{5}$$

下成为

$$\iint G(u, v)\begin{vmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{vmatrix}\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \tag{6}$$

这里 $G(u, v) = F(x(u, v), y(u, v))$. (6)中的行列式称为 x, y 关于 u, v 的 Jacobi 行列式或函数行列式.

Jacobi 对于函数行列式专门有一篇重要文章[①]. 在此文中, Jacobi 考虑了 n 个函数 u_1, u_2, $\cdots$, u_n, 其中每一个都是 x_1, x_2, $\cdots$, x_n 的函数; 他提出问题, 问什么时候从这 n 个函数能消去 x_i 使得这些 u_i 用一个方程联系起来. 如果这不可能, 就称函数 u_i 是无关的. 答案是, 如果 u_i 关于 x_i 的 Jacobi 行列式是零, 则函数不是无关的, 反之也对. 他还给出了 Jacobi 行列式的乘积定理, 即如果 u_i 是 y_i 的函数, 而 y_i 是 x_i 的函数, 则 u_i 关于 x_i 的 Jacobi 行列式是 u_i 关于 y_i 的 Jacobi 行列式和 y_i 关于 x_i 的 Jacobi 行列式的乘积.

3. 行列式和二次型

将二次曲线和二次曲面的方程变形, 选有主轴方向的轴作为坐标轴以简化方程的形状, 这个问题是在 18 世纪中引进的. 当方程是标准型即主轴是坐标轴时, 二次曲面用二次项的符号来进行分类, 这是 Cauchy 在他的《几何中无穷小演算的应用教程》(*Leçonssur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie*,

---

① *Jour. für Math.*, 22, 1841, 319～359 = *Werke*, 3, 393～438.

1826)[①]中给出的. 然而,那时并不清楚,在化简成标准型时,总得到同样数目的正项和负项. Sylvester 回答了这个问题,利用了他关于 n 个变数的二次型的惯性定律[②]. 早已知道,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j \tag{7}$$

总能用具有非零行列式的实线性变换

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} y_j,\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

化成 r 个平方项的和[③]:

$$y_1^2 + \cdots + y_s^2 - y_{s+1}^2 - \cdots - y_{r-s}^2. \tag{8}$$

Sylvester 定律说,正项的个数 s 以及负项的个数 $r-s$ 总是不变的,不管用的是什么实变换. Sylvester 把这定律看成是自明的,没有给出证明.

这定律被 Jacobi 重新发现和证明了[④]. 设一个二次型对变数的所有非零的实值都取正值,就称它为正定的;如对上述变数它能取正值或零,就称为半定的;而当取值永远是负的或 0 时就称为负定的,这些术语是 Gauss 在他的《算术研究》中加以引进的(第 271 节).

二次型化简的进一步研究涉及二次型或行列式的特征方程的概念. 三个变数的二次型在 18 世纪和 19 世纪前半期通常是写成

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz,$$

而在近代则写成

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3. \tag{9}$$

在二次型的后一种记法中曾把它同行列式

---

① *Œuvres*, (2), 5, 244~285.

② *Phil. Mag.*, (4), 1852, 138~142 = *Coll. Math. Papers*, 1, 378~381.

③ r 是型的秩,即系数矩阵的秩,秩的概念见第 4 节.

④ *Jour. für Math.*, 53, 1857, 265~270 = *Werke*, 3, 583~590; 也看 593~598.

$$(10)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ a_{ij}=a_{ji}$$

相联系. 二次型或行列式的特征方程或本征方程是

$$(11)\qquad \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

满足这个方程的值 λ 称为特征根或本征根. 由 λ 的这些值能立刻获得主轴的长度①.

特征方程的概念隐含地出现在 Euler 的化三个变数的二次型到它们的主轴上去的著作中②,虽然他对特征根的实性缺乏证明. 特征方程的概念首先明确地出现在 Lagrange 关于线性微分方程组的著作中③,也出现于 Laplace 在同一领域的著作中④.

Lagrange 在处理他那时代已经知道的六大行星的运动微分方程组时,涉及到这些行星相互作用的长期微扰. 他的特征方程(也称长期方程)联系于一个六阶行列式,而 λ 的值确定了微分方程组的解. 他会分解这六次方程并且获得了根的情况. Laplace 在他的《天体力学》中证明了,如果这些行星都沿同一方向运动,则这六个特征根是实数且各不相同. 三个变数的二次型的特征值的实性是由 Hachette, Monge 和 Poisson 建立的⑤.

Cauchy 从 Euler, Lagrange 和 Laplace 的著作中认识了共同

---

① 型(9)可以通过一个线性变换 $x'_i=\sum_j m_{ij}x_j\ (i,j=1,2,3)$ 化简成 $\sum_{j=1}^{3}\lambda_j x_j'^2$, 这里 λ_j 是(11)的特征根. 用矩阵语言说,变换的矩阵 M 是正交的;即 M 的转置等于 M 的逆.

② 他的 *Introductio*(1748)的附录的第五章 = *Opera*, (1),9,379~392.

③ *Misc. Taur.*, 3,1762~1765 = *Œuvres*, 1,520~534, 与 *Mém. de l'Acad. des Sci.*, *Paris*, 1774 = *Œuvres*, 6,655~666.

④ *Mém. de l'Acad. des Sci.*, *Paris*, 1772, pub. 1775 = *Œuvres*, 8,325~366.

⑤ Hachette 与 Monge: *Jour. de l'Ecole Poly.*, 4,1801~1802,143~169; Poisson 与 Hachette, *ibid.*, 170~172.

的特征值问题. 在他1826年的《教程》①中着手研究化简三个变数的二次型的问题,并证明了特征方程在直角坐标系的任何变换下是不变的. 三年后在他的《数学练习》(*Exercices de mathématiques*)②中,他开始研究行星轨道的长期不等式的问题. 在这工作的过程中,他证明了 n 个变数的两个二次型

$$A = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j, \quad B = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_i x_j$$

(Cauchy 的 B 是平方和)能用一个线性变换

$$x_1 = c_{11}x_1' + \cdots + c_{1n}x_n',$$
$$\cdots\cdots$$
$$x_n = c_{n1}x_1' + \cdots + c_{nn}x_n'$$

同时化成平方和. 他还解决了对任何多个变数的二次型找主轴的问题,在这工作中,他再次用到特征根的概念.

他的工作总括如下:设 A 和 B 是任两个给定的二次型,于是能考虑二次型束 $uA + vB$, 这儿 u 和 v 是任意参数. 束的本征根是比 $-u/v$ 的一些值,这些值使束的行列式 $|uA + vB|$ 为零. Cauchy 证明了束的本征根在如下的特殊情况下全为实数,即当其中一个二次型对变数的所有非零实数值是正定的情况. 因 $uA + vB$ 的行列式是对称的($d_{ij} = d_{ji}$),而 B 可以是单位行列式($b_{ij} = 0$ 对 $i \neq j$, 而 $b_{ii} = 1$). Cauchy 证明了,任何阶的任何一个实对称行列式都有实特征根. Cauchy 的结果在1834年由 Jacobi③ 所重复,排除了有相等本征根的情况. 特征方程这个术语是属于 Cauchy 的④.

相似行列式的概念也产生于变换的研究. 两个行列式 A 和 B 是相似的,如果存在一个非零行列式 P 使 $A = P^{-1}BP$. Cauchy 考

---

① *Œuvres*, (2), 5, 244～285.

② 4, 1829, 140～160 = *Œuvres*, (2), 9, 174～195.

③ *Jour. für Math.*, 12, 1834, 1～69 = *Werke*, 3, 191～268.

④ *Exercices d'analyse et de physique mathématique*, 1, 1840, 53 = *Œuvres*, (2), 11, 76.

察了相似变换，在 1826 年的《教程》①中，他证明了它们有相同的特征值. 相似变换的重要性在于将投影变换分类（第 38 章第 5 节），这是一个长期以来被综合处理的问题. 设一个图形 F 是用线性变换 A 同图形 G 相联系，并设另一个这样的变换 B 变 F 到 F'，变 G 到 G'，则变 F' 到 G' 的变换 C 将和 A 有同样的性质. 变换 $C=BAB^{-1}$，这是由于 B^{-1} 变 F' 到 F，A 变 F 到 G，而 B 变 G 到 G' 的缘故.

1858 年 Weierstrass②对同时化两个二次型成平方和给出了一个一般的方法. 他还证明了，如果二次型之一是正定的，那么，即使某些特征根是相等的，这个化简也是可能的. Weierstrass 对此问题的兴趣是由围绕平衡位置的小振动的动力学问题引起的，他用他关于二次型的工作证明了稳定性并不因该系统的相等周期的出现而受到破坏，这与 Lagrange 和 Laplace 的假设相反.

Sylvester 在 1851 年③研究二次曲线和二次曲面的切触和相交时需要考虑这种二次曲线和二次曲面束的分类. 特别地，他找寻任何束的标准型，把束写成形式 $A+\lambda B$，这里

$$A = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2ezx + 2fxy,$$
$$B = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy,$$

他考察了行列式

$$\begin{vmatrix} a+\lambda A & f+\lambda F & e+\lambda E \\ f+\lambda F & b+\lambda B & d+\lambda D \\ e+\lambda E & d+\lambda D & c+\lambda C \end{vmatrix}. \tag{12}$$

他的分类方法引进了初等因子的概念. $A+\lambda B$ 的行列式的元素是 λ 的多项式. Sylvester 证明了，如果 $|A+\lambda B|$ 的任一阶的全部子式有一个公共因子 $\lambda+\varepsilon$，则当 A 和 B 经它们变数的一个线性变换同时变换以后，这个因子将仍是同样子式组的公共因子. 他还证

---

① *Œuvres*, (2), 5, 244～285.

② *Monatsber. Berliner Akad.*, 1858, 207～220 = *Werke*, 1, 233～246.

③ *Phil. Mag.*, (4), 1, 1851, 119～140 = *Coll. Math. Papers*, 1, 219～240.

明了,如果全部 i 阶子式有因子 $(\lambda+\varepsilon)^{\alpha}$,则 $(i+h)$ 阶子式将包含因子 $(\lambda+\varepsilon)^{(h+1)\alpha}$. 对每个 i,i 阶子式的最大公因子 $D_i(\lambda)$ 中所出现的各线性因子的方幂是 $|A+\lambda B|$ 的或任何一般行列式 A 的初等因子. 对每个 i,$D_i(\lambda)$ 被 $D_{i-1}(\lambda)$ 所除的商称为 $|A+\lambda B|$ 的不变因子. Sylvester 没有证明不变因子组成两个二次型的不变量的完全集.

Weierstrass①完成了二次型的理论并将其推广到双线性型,双线性型是

$$a_{11}x_1y_1+a_{12}x_1y_2+\cdots+a_{nn}x_ny_n.$$

用 Sylvester 初等因子的概念,Weierstrass 得到束 $A+\lambda B$ 的标准型,这里 A 和 B 不一定是对称的,但服从于 $|A+\lambda B|$ 不恒等于零的条件. 他还证明了属于 Sylvester 的一个定理的逆. 这逆定理说,如 $A+\lambda B$ 的行列式同 $A'+\lambda B'$ 的行列式的初等因子一致,则能找到一对线性变换同时将 A 变到 A',将 B 变到 B'.

在行列式的大量的定理中,有一些涉及到 n 个未知数 m 个线性方程的解. Henry J. S. Smith(1826—1883)②引进了增广矩阵和非增广矩阵的术语,例如,来讨论方程组

$$\begin{cases}a_1x+a_2y=f\\ b_1x+b_2y=g\\ c_1x+c_2y=h\end{cases}$$

的解的存在性和个数. 增广矩阵和非增广矩阵是

$$\left\|\begin{matrix}a_1 & a_2 & f\\ b_1 & b_2 & g\\ c_1 & c_2 & h\end{matrix}\right\| \text{和} \left\|\begin{matrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{matrix}\right\|.$$

有很多人,包括 Kronecker 和 Cayley 在内,作出的一系列结果引导到现在用矩阵来叙述的一般结果,但在 19 世纪中叶它们是用增

---

① *Monatsber. Berliner Akad*, 1868, 310～338 = *Werke*, 2, 19～44.

② *Phil. Trans.*, 151, 1861, 293～326 = *Coll. Math. Papers*, 1, 367～409.

广和非增广行列式来叙述的. 关于 n 个未知数 m 个方程, m 可以大于、等于或小于 n, 方程可以是齐次的(常数项为零), 或非齐次的, 其一般结果叙述在(例如)Charles L. Dodgson(Lewis Carroll, 1832—1898)的《行列式的初等理论》(*An Elementary Theory of Determinants*, 1867)中. 在上面的课本中可发现现代的条件: 为使 n 个未知数的 m 个非齐次线性方程的方程组是相容的, 必要而充分的是, 在非增广和增广矩阵中的最高阶非零行列式是同阶的, 用矩阵的语言来说就是两个矩阵的秩相同.

整个 19 世纪都得到行列式的新结果. 作为一个例证, 可举 Hadamard 在 1893 年①证明的一个定理, 虽然这定理在此以前及以后有很多人知道和证明过. 设行列式 $D = |a_{ij}|$ 的元素满足条件 $|a_{ij}| \leqslant A$, 则

$$|D| \leqslant A^n \cdot n^{n/2}.$$

行列式的以上各定理只是已建立的大量定理中很少的样本. 在一般行列式的大量其他定理之外, 还有成百个有关特殊形式行列式的其他定理, 这些特殊形式中有对称行列式($a_{ij} = a_{ji}$), 斜对称行列式($a_{ij} = -a_{ji}$), 正交行列式(正交坐标变换的行列式), 加边行列式(由添加一些行和列扩大而成的行列式), 复合行列式(元素本身是行列式), 以及其他很多特殊类型的行列式.

4. 矩　　阵

可以说矩阵这个课题在诞生之前就发展得很好了. 我们知道, 行列式的研究开始于 18 世纪中叶以前. 行列式包括一个数字方阵, 通常总是涉及这个方阵的值, 就是由行列式的定义所给出的值. 然而从行列式的大量工作中明显地表现出来的是, 对于很多目的, 方阵本身都可以研究和使用, 不管行列式的值是否与该问题有

① *Bull. des Sci. Math.*, (2), 17, 1893, 240～246 = *Œuvres*, 1, 239～245.

关.于是,仍然需要认识方程本身应该有与行列式无关的本性.方阵本身称为矩阵.矩阵这个词是 Sylvester①首先使用的,这是发生在他实际上希望引用数字的矩形阵列而又不能再用行列式这个词的时候,虽然那时他仅仅涉及到由矩形阵列的元素所能形成的那些行列式.后来,如我们在上一节中看到的,在根本没有说到矩阵时增广矩阵就自由地使用了.矩阵的基本性质,如我们将要看到的,也是在行列式的发展中建立起来的.

确实如像 Arthur Cayley 所坚持的(在下面引证的 1885 年的文章中)那样,在逻辑上,矩阵的概念先于行列式的概念,而在历史上次序正相反.这就是为什么在矩阵引进的时候它的基本性质就已经清楚了的原因.因此,当数学家们预言矩阵概念的可能的用途时,有一个普遍的印象是错误的,即矩阵是由纯数学家发明的有高度创见的独立创造.由于矩阵的应用已很好地建立,这使 Cayley 想起要把它们作为不同的实体引进.他说:"我决然不是通过四元数而获得矩阵概念的;它或是直接从行列式的概念而来,或是作为一个表达方程组

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

的方便的方法而来的."就这样他引进了矩阵

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

它代表了这个变换的主要信息.因为 Cayley 是首先指出矩阵本身的,而且关于这个题目首先发表了一系列文章,所以他一般地被归功为矩阵论的创立者.

Cayley 1821 年生于一个古老而有才能的英国家庭,在学校中他就显示了数学才能.他的老师说服他的父亲送他到剑桥,而不要让他做家务.在剑桥他是数学荣誉会考的一等第一名,并获得

① *Phil. Mag.*, (3), 37,1850,363~370 = *Coll. Math. Papers*, 1,145~151.

Smith 奖. 他当选为剑桥的三一学院的研究员和助理导师,但 3 年后由于必须担任圣职而离开. 他转向法律并在这个职业上花费了后来的 15 年. 这期间他用了可观的时间搞数学,并发表了近 200 篇文章. 也是在这时,他和 Sylvester 开始了长期的友谊和合作.

1863 年,他被任命为剑桥新创立的 Sadler 数学教授. 除去 1882 年受 Sylvester 的聘请在霍普金斯大学以外,他一直在剑桥,直到 1895 年逝世为止. 他在各个课题上都是多产的作者和创造者,特别是在 n 维解析几何、行列式理论、线性变换、斜曲面和矩阵论方面. 同 Sylvester 一起,他是不变量理论的奠基人. 由于这大量的贡献,他获得很多荣誉.

和 Sylvester 不一样,Cayley 是一个性情温和、冷静判断和沉着的人,他慷慨地帮助和鼓励别人. 在法律方面的良好工作和数学上的巨大成就以外,他还找时间培养兴趣于文学、旅行、绘画和建筑学.

同研究线性变换下的不变量(第 39 章第 2 节)相结合,Cayley 首先引进矩阵以简化记号①. 这里他给出一些基本概念. 接着是他关于这个课题的头一篇重要文章《矩阵论的研究报告》②.

为简单起见,我们就 2×2 矩阵或 3×3 矩阵来叙述 Cayley 的一些定义,虽然这些定义是用于 $n\times n$ 矩阵并在某些情况下用于长方形矩阵的. 两个矩阵相等,如果他们的对应元素相等. Cayley 定义零矩阵和单位矩阵为

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \text{和} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

定义两个矩阵的和为这样的矩阵,它的元素是两个相加矩阵的对应元素之和. 他注意到这个定义可用于任何两个 $m\times n$ 矩阵,且加

① *Jour. für Math.*, 50,1855,282～285 = *Coll. Math. Papers*, 2,185～188.

② *Phil. Trans.*, 148,1858,17～37 = *Coll. Math. Papers*, 2,475～496.

法是可结合和可调换的(交换的). 若 m 是一个数而 A 是一个矩阵,则 mA 被定义为这样的矩阵,它的每一个元素都是 A 的对应元素的 m 倍.

Cayley 直接从两个相继变换的效应的表示作出两个矩阵乘法的定义. 例如,设变换

$$x' = a_{11}x + a_{12}y,$$
$$y' = a_{21}x + a_{22}y,$$

后跟着变换

$$x'' = b_{11}x' + b_{12}y',$$
$$y'' = b_{21}x' + b_{22}y',$$

则 x'', y''和 x, y 之间的关系由下式给出:

$$x'' = (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21})x + (b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22})y,$$
$$y'' = (b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21})x + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22})y.$$

因此 Cayley 定义两个矩阵的积为

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix}.$$

即元素 c_{ij} 是左边因子的第 i 行元素和右边因子的第 j 列对应元素乘积之和. 乘法是可结合的,但一般不可交换. Cayley 指出, $m \times n$ 矩阵只能用 $n \times p$ 矩阵去乘.

在同一篇文章中,他叙述了

$$\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{pmatrix}$$

的逆为

$$\frac{1}{\nabla}\begin{pmatrix} \partial_a\nabla, & \partial_{a'}\nabla, & \partial_{a''}\nabla \\ \partial_b\nabla, & \partial_{b'}\nabla, & \partial_{b''}\nabla \\ \partial_c\nabla, & \partial_{c'}\nabla, & \partial_{c''}\nabla \end{pmatrix},$$

这里 ∇ 是矩阵的行列式,而 $\partial_x\nabla$ 是 x 在这行列式中的余子式,即 x 的子式带上适当的符号. 一个矩阵和它的逆的乘积是单位矩阵,用 I 表示.

当 $\nabla = 0$ 时，矩阵是不定的(用现代术语来说，是奇异的)，因而没有逆. Cayley 断言，两个矩阵的乘积可以是零，而无须其中有一个为零，只须其中之一是不定的. 实际上，Cayley 是错的；两个矩阵都必须是不定的才行. 因为假如 $AB = 0$, $A \neq 0$, $B \neq 0$. 且仅 A 是不定的，那么 B 的逆，即 B^{-1} 存在，因而 $ABB^{-1} = 0 \cdot B^{-1} = 0$. 但 $BB^{-1} = I$, 因此 $AI = 0$ 或 $A = 0$.

折转矩阵(转置或共轭)定义为这样的矩阵，矩阵中行和列对换. 给出陈述说(但没有证明) $(LMN)' = N'M'L'$, 这里撇(′)表示转置. 如果 $M' = M$, 则 M 称为是对称的；如果 $M' = -M$, 则 M 是斜对称的(或交错的). 任何一个矩阵可表成一个对称矩阵和一个斜对称矩阵的和.

从行列式理论中带来的另一个概念是方阵的特征方程. 对于矩阵 M，它定义为

$$|M - xI| = 0,$$

这里 $|M - xI|$ 是矩阵 $M - xI$ 的行列式，而 I 是单位矩阵. 例如设

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

则特征方程(Cayley 不用这术语，虽然它是由 Cauchy 引进用于行列式的[第 3 节])是

$$x^2 - (a + d)x + (ad - bc) = 0. \tag{13}$$

这方程的根是矩阵的特征根(特征值).

在 1858 年的文章中，Cayley 宣告了一个结果，现在称为任意阶方阵的 Cayley-Hamilton 定理. 这定理说，在(13)中用 M 代替 x，则得到的矩阵是零矩阵. Cayley 说他曾对 3×3 情况验证了这定理，又说进一步的证明是不必要的. Hamilton 与这定理的关系是根据下述事实，即在他的《四元数讲义》[①]中在引进向量 $\boldsymbol{r}$ 的线性向量函数 $\boldsymbol{r}'$ 的概念时，涉及到从 x, y 和 z 到 x', y'和 z'的一个

① 1853, p. 566.

线性变换.他证明这个变换的矩阵满足它的特征方程,虽然他不想正式用矩阵语言来表述.

别的数学家发现了一些矩阵类的特征根的特殊性质. Hermite[①] 证明了,如矩阵 $M = M^*$,则特征根是实数,这里 M^* 是将 M 的每个元素用它的共轭复数代替后,再转置得到的矩阵(这样的矩阵 M 现在称为 Hermite 矩阵). 1861 年 Clebsch[②] 从 Hermite 定理推导出,实斜对称矩阵的非零特征根是纯虚数.后来 Arthur Buchheim[③](1859—1888)证明了,若 M 是对称的,且元素是实数,则特征根是实数,虽然 Cauchy[④]已对行列式建立了这个结果. Henry Taber(1860—?)在另一篇文章[⑤]中作为显然的事实断言:设

$$x^n - m_1 x^{n-1} + m_2 x^{n-2} - \cdots \pm m_n = 0$$

是任一方阵 M 的特征方程,则 M 的行列式是 m_n,如果把矩阵的主子式理解为这样的子式的*行列式*,这些子式的对角线是矩阵 M 的主对角线的一部分,则 m_i 是 i 阶主子式的和.于是特别地,m_1 是主对角元的和,它也是特征根的和.这个和称为矩阵的迹. Taber 的断言是由 William Henry Metzler(1863—?)[⑥]给出证明的.

Frobenius[⑦] 对于特征方程提出了一个问题,他要找最小多项式,即矩阵所满足的次数最低的多项式.他说,它是由特征多项式的因式所形成的,而且是唯一的.直到 1904 年[⑧], Kurt Hensel (1861—1941)才证明了 Frobenius 的唯一性的结论.在同一篇文章中, Hensel 还证明了,如 $f(x)$是矩阵 M 的最小多项式,而 $g(x)$

---

① *Comp. Rend.*, 41,1855,181~183 = *Œuvres*, 1,479~481.
② *Jour. für Math.*, 62,1863,232~245.
③ *Messenger of Math.*, (2),14,1885,143~144.
④ *Œuvres*, (2),9,174~191.
⑤ *Amer. Jour. of Math.*, 12,1890,337~396.
⑥ *Amer. Jour. of Math.*, 14. 1891/1892,326~377.
⑦ *Jour. für Math.*, 84,1878,1~63 = *Ges. Abh.* 1,343~405.
⑧ *Jour. für Math.*, 127,1904,116~166.

是矩阵满足的任一其他的多项式，则 $f(x)$ 整除 $g(x)$.

矩阵的秩的概念是由 Frobenius[①]在 1879 年引进的，虽然是联系到行列式而说的. 一个 m 行 n 列矩阵(阶为 $m\times n$)有所有 k 阶(从 1 阶(A 的元素本身)到包括两个整数 m 和 n 中的较小者在内的所有的阶)子式. 一个矩阵的秩为 r 当且仅当它至少有一个 r 阶子式其行列式不为零，而所有高于 r 阶的子式的行列式都为零.

两个矩阵 A 和 B 可用各种方式相联系. 如果存在两个非奇异矩阵 U 及 V 使 $A = UBV$，则称它们等价. Sylvester[②]曾在他的关于行列式的著作中证明：B 的 i 行子式的行列式的最大公因子 d_i' 等于 A 的 i 行子式的行列式的最大公因子 d_i. 后来 H. J. S. Smith[③]在研究整数元素的矩阵时，证明了：每个秩为 ρ 的矩阵 A 等价于对角矩阵，其元素沿主对角线向下排列是 h_1, h_2, $\cdots$, h_ρ，且 h_i 整除 h_{i+1}. 商 $h_1 = d_1$, $h_2 = d_2/d_1$, $\cdots$，称为 A 的不变因子. 进一步设

$$h_i = p_1^{l_{i1}} p_2^{l_{i2}} \cdots p_k^{l_{ik}}$$

(这里 p_i 是素数)，这些不同的方幂 $p_j^{l_{ij}}$ 是 A 的初等因子. 不变因子确定初等因子，反之亦然.

不变因子和初等因子的概念，是从 Sylvester 和 Weierstrass 的行列式的工作中产生的(如早先指出的)，它们是被 Frobenius 在 1878 年的文章中带到矩阵中来的. 不变因子和初等因子的意义在于：矩阵 A 等价于矩阵 B 当且仅当 A 和 B 有相同的初等因子或不变因子.

Frobenius 在 1878 年的文章中对不变因子做了进一步的工作，然后以合乎逻辑的形式整理了不变因子和初等因子的理论[④].

---

① *Jour. für Math.*, 86, 1879, 146～208 = *Ges. Abh.* 1, 482～544.

② *Phil. Mag.*, (4), 1, 1851, 119～140 = *Coll. Math. Papers*, 1, 219～240.

③ *Phil. Trans.*, 151, 1861～1862, 293～326 = *Coll. Math. Papers*, 1, 367～409.

④ *Sitzungsber. Akad. Wiss. zu Berlin*, 1894, 31～44 = *Ges. Abh.*, 1, 577～590.

1878 年文章中的工作使 Frobenius 能给出 Cayley-Hamilton 定理的第一个一般性的证明，且对矩阵的本征根(特征根)有一些是相等的情况修改了这个定理. 在这篇文章中，他还证明了：当 $AB^{-1} = B^{-1}A$ 时，这时有确定的商 A/B，则 $(A/B)^{-1} = B/A$，还证明了 $(A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^{-1}$，这里 A^{T} 是 A 的转置.

正交矩阵这个课题曾受到很大的注意. 虽然这术语在 1854 年①就由 Hermite 使用了，但直到 1878 年才由 Frobenius 发表正式的定义(看前面的参考书目). 矩阵 M 是正交的，如果它等于它的转置的逆，即如果 $M = (M^{\mathrm{T}})^{-1}$. 除定义外，Frobenius 证明了，如 S 表示一个对称矩阵，T 表示一个斜对称矩阵，则正交矩阵总能写成形式 $(S-T)/(S+T)$，或更简单地写为 $(I-T)/(I+T)$.

像矩阵论的许多其他概念一样，相似矩阵的概念，起源于行列式的早期研究工作，早至 Cauchy 的工作. 两个方阵是相似的，如果存在一个非奇异矩阵 P 使 $B = P^{-1}AP$. 两个相似矩阵的特征方程是相同的，因而有相同的不变因子和初等因子. 对复元素的矩阵，Weierstrass 在他 1868 年的文章中证明了这个结果(虽然是对行列式做的). 由于一个矩阵代表一线性齐次变换，所以相似矩阵可看成代表同一个变换，只是参考于两个不同的坐标系.

用相似矩阵和特征方程的概念，Jordan②证明了矩阵可变到标准型. 设矩阵 J 的特征方程是

$$f(\lambda) = \lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + \cdots + b_n = 0,$$

且设

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{l_1}(\lambda - \lambda_2)^{l_2}\cdots(\lambda - \lambda_k)^{l_k},$$

这里 λ_i 是互不相同的，则令

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ & & \cdots\cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{pmatrix}$$

① *Cambridge and Dublin Math. Jour.*, 9, 1854, 63～67 = *Œuvres*, 1, 290～295.

② *Traité des substitutions*, 1870, Book Ⅱ, 88～249.

表示一个 l_i 阶矩阵. Jordan 证明了 J 可以变换到一个相似矩阵，它具有形式

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \cdots\cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & J_k \end{pmatrix}.$$

这就是矩阵的 Jordan 标准型或法式.

Frobenius 在他 1878 年的文章中用逆步变换的名称处理了 A 到 B 的相似变换. 在同一论述中他处理了合同矩阵或同步矩阵的概念. 这告诉我们，如果 $A = P^{\mathrm{T}}BP$，则 A 与 B 合同，写成 $A \overset{\mathrm{C}}{=} B$. 例如将矩阵 A 的同样的行和列同时进行对换，所得到的矩阵 A 的变换就是合同变换. 还有，秩为 r 的对称矩阵 A 可以用合同变换化简成同秩的对角矩阵；即

$$P^{\mathrm{T}}AP = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ & & \cdots\cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & d_{rr} & \cdots & 0 \\ & & \cdots\cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

关于合同变换，有很多基本的定理. 例如，设 S 是对称的，而 S_1 合同于 S，则 S_1 是对称的；设 S 是斜对称的，则 S_1 也是斜对称的.

Metzler 于 1892 年发表在《美国数学杂志》上的文章中引进了矩阵的超越函数，把每个这样的函数写成矩阵的幂级数. 他对 e^M，e^{-M}，$\log M$，$\sin M$ 和 $\sin^{-1} M$ 建立了级数. 例如

$$\mathrm{e}^M = \sum_{n=0}^{\infty} M^n / n!.$$

矩阵论的分支是很多的. 矩阵已用来表示二次型和双线性型. 这样的型化简成简单的标准型是关于矩阵不变量工作的核心. 它

们还与超复数紧密联系，而 Cayley 在他 1858 年的文章中建立了把超复数当作矩阵来看待的思想.

行列式和矩阵两者都已经被推广到了无限阶. 无限阶行列式已出现在 Fourier 的工作中，用以确定一个函数的 Fourier 级数展开的系数(第 28 章第 2 节)，也已出现在 Hill 关于常微分方程的解的工作中(第 29 章第 7 节). 关于无限阶行列式的零星的文章写于这两篇杰出的 19 世纪的研究工作之间，但重要的活动推迟到 Hill 的时候.

无限阶矩阵隐含地及明显地包含在 Fourier，Hill 和 Poincaré 的著作中，Poincaré 完成了 Hill 的工作. 可是研究无限矩阵的巨大动力是来自积分方程的理论(第 45 章). 我们不能给无限阶行列式和矩阵提供篇幅了①.

在矩阵的初等的工作中，元素是通常的实数，虽然为了数论的好处，限制于整数元素做了大量的工作. 然而，它们可以是复数并且的确可以是许多别的量. 自然，矩阵本身所具有的性质依赖于元素的性质. 19 世纪末和 20 世纪初的研究已经专门针对元素属于抽象域的矩阵的性质. 近代物理的数学机械中的矩阵论的重要性在这儿不能再谈了，但关于这一方面联系到 Tait 所作的预言是有趣的，他说："Cayley 正为未来的一代物理学家锻造武器."

参考书目

Bernkopf, Michael: "A History of Infinite Matrices," *Archive for History of Exact Sciences*, 4, 1968, 308～358.

Cayley, Arthur: *The Collected Mathematical Papers*, 13 vols., Cambridge University Press (1889～1897), Johnson Reprint Corp., 1963.

Feldman, Richard W., Jr.: (Six articles on matrices with various titles), *The Mathe-*

① 见本章末尾书目中 Bernkopf 的文献.

matics Teacher, 55,1962,482～484,589～590,657～659;56,1963,37～38,101～102,163～164.

Frobenius, F. G.: *Gesammelte Abhandlungen*, 3 vols., Springer-Verlag, 1968.

Jacobi, C. G. J.: *Gesammelte Werke*, Georg Reimer, 1884, Vol. 3.

MacDuffee, C. C.: *The Theory of Matrices*, Chelsea, 1946.

Muir, Thomas: *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development* (1906～1923), 4 vols., Dover (reprint), 1960.

Muir, Thomas: List of writings on the theory of matrices, *Amer. Jour. of Math.*, 20,1898,225～228.

Sylvester, James Joseph: *The Collected Mathematical Papers*, 4 vols., Cambridge University Press, 1904～1912.

Weierstrass, Karl: *Mathematische Werke*, Mayer und Müller, 1895, Vol. 2.

第 34 章

19 世纪的数论

> Fourier 确实有过这样的看法，认为数学的主要目的是公众的需要和对自然现象的解释；但是像他这样一个哲学家应当知道，科学的唯一目的是人类精神的光荣，而且应当知道，在这种观点之下，数[论]的问题和关于世界体系的问题具有同等价值.
>
> C. G. J. Jacobi

1. 引　言

直到 19 世纪，数论还只是一系列孤立的结果，虽然这些结果常常是光辉的. 一个新的纪元是从 Gauss 的《算术探讨》(*Disquisitiones Arithmeticae*)① 开始的，这部书是他 20 岁时写的. 这部伟大的著作曾在 1800 年寄到法国科学院而被拒绝，但 Gauss 自己把它发表了. 在这部书中，他把记号标准化了，把现存的定理系统化并推广了，把要研究的问题和攻题的已知方法进行了分类，还引进了新的方法. 在 Gauss 关于数论的著作中有三个主要思想：同余的理论，代数数的引进，以及作为 Diophantine 分析的指导思想的型的理论. 这部著作不仅是现代数论的开始，而且还确定了直到目前为止有关这一课题的工作方向.《探讨》难读，但 Dirichlet 作了解释.

在 19 世纪另一重要的发展是解析数论，它除了应用代数去处理涉及整数的问题外，还用了分析. 这一革新的领导人是 Dirichlet 和 Riemann.

---

① 发表于 1801 年 = *Werke*, 1.

2. 同余理论

虽然同余的概念不是从 Gauss 开始的——它出现在 Euler, Lagrange 和 Legendre 的著作中——但是 Gauss 在《探讨》的第一节引进了同余的记号,并在此后系统地应用了它. 基本思想是简单的. 数 27 以 4 为模同余于 3,

$$27 \equiv 3 \text{ modulo } 4,$$

因为 27－3 恰被 4 整除. (字 modulo 常常简写为 mod.)一般地说,当 a, b 和 m 是整数时,如果 $a-b$(恰)被 m 整除,或者如果 a 和 b 被 m 除时具有相同的余数,那么

$$a \equiv b \text{ modulo } m.$$

这时就说 b 是 a 的模 m 剩余,或者 a 是 b 的模 m 剩余. 正如 Gauss 所指出的,对固定的 a 和 m,以 m 为模的 a 的一切剩余由 $a+km$ 给出,这里 $k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

关于相同模的同余式,在某些范围内能像方程式那样处理. 这种同余式可以相加、相减和相乘. 也可以求包含未知量的同余式的解. 例如,x 的什么值满足

$$2x \equiv 25 \text{ modulo } 12?$$

这个方程没有解,因为 $2x$ 是偶数而 $2x-25$ 是奇数,所以 $2x-25$ 不可能是 12 的倍数. 多项式同余式的基本定理已由 Lagrange① 建立了,Gauss 在第二节对它重新作了证明. 一个 n 次同余式

$$Ax^n + Bx^{n-1} + \cdots + Mx + N \equiv 0 \text{ modulo } p$$

不可能有多于 n 个互不同余的根,其中模 p 是素数,它不能整除 A.

在第三节 Gauss 开始处理幂的同余式. 在这里他用同余式的术语给了 Fermat 小定理一个证明; Fermat 小定理用同余式的术

① *Hist. de l'Acad. de Berlin*, 24, 1768, 192ff., pub. 1770 = *Œuvres*, 2, 655～726.

语叙述就是:若 p 是素数而 a 不是 p 的倍数,则

$$a^{p-1} \equiv 1 \text{ modulo } p.$$

这个定理从他对高次同余式,即对

$$x^n \equiv a \text{ modulo } m$$

的研究中推出,这里 a 和 m 是互素的.这个题目被 Gauss 之后的许多人继续研究着.

《探讨》的第四节讨论平方剩余.如果 p 是一个素数,而 a 不是 p 的倍数,并且如果存在一个 x,使得 $x^2 \equiv a \bmod p$,则 a 是 p 的平方剩余;否则 a 是 p 的平方非剩余.在证明了一些关于二次同余式的次要的定理之后,Gauss 给出了二次反转定律的第一个严密证明(第 25 章第 4 节).虽然 1783 年,Euler 在他的《分析短论》的一篇论文中已经给出了像 Gauss 一样完全的叙述,但是 Gauss 在他的《探讨》的论文第 151 条中说,没有一个人以他那样简单的形式提出过这个定理.他参考了 Euler 的其他著作,其中包括《短论》中的别的论文,还参考了 Legendre1785 年的著作.关于这些论文,Gauss 正确地指出,证明都是不完全的.

据推测,Gauss 在 1796 年当他 19 岁时已经发现了这个定律的证明.在《探讨》中他给出了另一个证明,以后他又发表了四个别的证明.在他未发表的论文中还找到另外两个证明.Gauss 说他找了许多证明,因为他希望找出一个能够建立双二次反转定律的证明(见下面).二次反转定律是同余式中的一个基本结果,Gauss 把它誉为算术中的宝石.在 Gauss 给出他的各个证明之后,后来的数学家给出了 50 个以上的其他证明.

Gauss 还讨论了多项式的同余式.如果 A 和 B 是 x 的两个多项式,不妨设是实系数的,那么人们知道,可以唯一地找到多项式 Q 和 R,使得

$$A = B \cdot Q + R,$$

式中 R 的次数比 B 的次数低.这时就能说,多项式 A_1 和 A_2 以第

三个多项式 P 为模是同余的，只要它们被 P 除时具有相同的余式 R.

Cauchy 用这种思想①通过多项式的同余式去定义复数. 如果 $f(x)$ 是一个实系数多项式，用 x^2+1 去除它，因为余数要比除数的次数低，这时就有

$$f(x) \equiv a + bx \bmod x^2+1.$$

根据除法的步骤知道，这里的 a 和 b 一定是实数. 如果 $g(x)$ 是另一个那样的多项式，则

$$g(x) \equiv c + dx \bmod x^2+1.$$

现在 Cauchy 指出，如果 A_1，A_2 和 B 是多项式，而且如果

$$A_1 = BQ_1 + R_1 \quad 和 \quad A_2 = BQ_2 + R_2,$$

则 $A_1 + A_2 \equiv R_1 + R_2 \bmod B$　和　$A_1A_2 \equiv R_1R_2 \bmod B$.

现在我们立刻可以看出

$$f(x) + g(x) \equiv (a+c) + (b+d)x \bmod x^2+1,$$

并且因为 $x^2 \equiv -1 \bmod x^2+1$，还有

$$f(x)g(x) \equiv (ac-bd) + (ad+bc)x \bmod x^2+1.$$

于是，数 $a+bx$ 和 $c+dx$ 像复数一样结合起来了；也就是说，它们具有复数的形式上的性质，x 取代了 i 的位置. Cauchy 还证明了，每一个模 x^2+1 不同余于 0 的多项式 $g(x)$ 都有逆，即存在多项式 $h(x)$ 使得 $h(x)g(x)$ 模 x^2+1 同余于 1.

Cauchy 确实引进了 i 去代替 x，对他来说 i 是一个实的未定量. 然后他证明了对任何

$$f(i) = a_0 + a_1 i + a_2 i^2 + \cdots$$

都有　$f(i) \equiv a_0 - a_2 + a_4 - \cdots + (a_1 - a_3 + a_5 - \cdots)i \bmod i^2+1$.

因此任何包含复数的表达式看起来就同 $c + d$i 这种形式一样，而人们是拥有对复数奏效的一切必需的工具的. 于是对 Cauchy 而

① *Exercices d'analyse et de physique mathématique*, 4, 1847, 84 ff. = *Œuvres*, (1), 10, 312～323 与 (2), 14, 93～120.

言,以他对 i 的理解,i 的多项式取代了复数,并且人们可以把对模 i^2+1 有相同余式的所有多项式归入同一类.这些类就是复数.

有趣的是,在 1847 年 Cauchy 还对$\sqrt{-1}$怀有疑惧.他说:"在代替了虚数论的代数等价论中,字母 i 不再表示符号$\sqrt{-1}$,我们完全拒绝了这个符号,并且我们能够毫无遗憾地放弃它,因为人们既不知道这个想像的符号表示什么,也不知道它意味着什么.相反,我们用字母 i 表示一个实的但却是未定的量,并且在用符号≡代替=的同时,我们把所谓虚方程变换为对于变量 i 和对于除数 i^2+1 的代数等价关系.因为这个除数在一切公式中都一样,所以可以不写它."

在这个世纪的 20 年代 Gauss 着手研究可应用于高次同余式的反转定律.这些定律又涉及到同余式的剩余.例如对于同余式

$$x^4 \equiv q \bmod p,$$

如果存在 x 的一个整值满足这个方程,人们就可以定义 q 作为 p 的一个双二次剩余.他得到了双二次反转定律(见下面)和三次反转定律.这方面的许多工作出现在从 1808—1817 年的论文中,而关于双二次剩余的正式定理是在 1828 年和 1832 年①的论文中给出的.

为了使他的三次和双二次剩余的理论优美而简单,Gauss 使用了复数,即形如 $a+bi$ 的数,其中 a 和 b 是整数或 0.在 Gauss 关于双二次剩余的著作中,必须考虑模 p 是形如 $4n+1$ 的素数的情形,形如 $4n+1$ 的素数能分解成复的因数,Gauss 需要这些因数.为了获得这些因数,Gauss 认识到,必须超出通常的整数域而引进复整数.虽然 Euler 和 Lagrange 已经把这种整数引入了数论,但正是 Gauss 建立了它们的重要性.

在通常的整数论中,可逆元素是 +1 和 −1,而在 Gauss 的复

① *Comm. Soc. Gott.*, 6,1828, 和 7, 1832 = *Werke*, 2,65~92 和 93~148; 也见 pp. 165~178.

整数论中，可逆元素却是±1 和±i. 一个复整数叫做合数，如果它是两个非可逆元素的复整数的乘积. 如果那种分解是不可能的，则该整数叫做一个素数. 例如 $5 = (1+2i)(1-2i)$，所以是合数，而 3 却是一个复素数.

Gauss 证明了复整数在本质上具有和普通整数相同的性质. Euclid 证明了(第 4 章第 7 节)，每一个整数可唯一地分解为素数的乘积. 这个唯一分解定理常被称为算术基本定理，Gauss 证明了，只要不把四个可逆元素作为不同的因数，唯一分解定理对复整数也成立. 这就是，如果 $a = bc = (ib)(-ic)$，则这两种分解是一样的. Gauss 还指出，求两个整数的最大公约数的 Euclid 法可应用于复整数.

普通素数的许多定理可转化为复素数的定理. 例如 Fermat 定理转化为如下形式：如果 p 是一个复素数 $a+bi$，而 k 是任何一个不能被 p 整除的复整数，则

$$k^{Np-1} \equiv 1 \text{modulo } p,$$

式中 Np 是 p 的模 a^2+b^2. 对复整数也有二次反转定律，这点 Gauss 在他 1828 年的论文中已陈述过.

通过复数，Gauss 能够把双二次反转定律叙述得相当简单. 把不能被 $1+i$ 整除的整数定义为非偶整数. 准素非偶整数是那种非偶整数 $a+bi$，其中 b 是偶数，$a+b-1$ 也是偶数. 例如 -7 和 $-5+2i$ 是准素非偶整数. 双二次剩余的反转定律可叙述为：如果 α 和 β 是两个准素非偶素数，A 和 B 是它们的模，则

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_4 = (-1)^{(1/4)(A-1)(1/4)(B-1)}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_4.$$

符号 $(\alpha/\beta)_4$ 具有下述意义：如果 p 是任何一个复素数，k 是任何一个不能被 p 整除的双二次剩余，则 $(k/p)_4$ 是 i 的幂 i^r，它满足同余式

$$k^{(Np-1)/4} \equiv 1 \text{modulo } p,$$

式中 Np 表示 p 的模. 这个定律等价于下列说法:两个准素非偶素数之间的两个双二次特征是相同的,也就是 $(\alpha/\beta)_4=(\beta/\alpha)_4$,只要每个素数模 4 同余于 1;但是如果没有一个素数满足这个同余条件,则这两个双二次特征就互反,即 $(\alpha/\beta)_4=-(\beta/\alpha)_4$.

Gauss 陈述了这一互反性定理,但是没有发表他的证明. 定理的证明是 Jacobi 于 1836—1837 年在哥尼斯堡(Königsberg)的演讲中给出的. Ferdinand Gotthold Eisenstein (1823—1852) 是 Gauss 的学生,他发表了这一定理的五个证明,其中前两个出现于 1844 年①.

Gauss 发现,对于三次互反性他能得到一个运用"整数" $a+b\rho$ 的定律,这里 ρ 是 $x^2+x+1=0$ 的一个根,a 和 b 是通常的(有理)整数,但是 Gauss 没有发表这个结果. 那是他死后在他的论文中发现的. 三次反转定律首先为 Jacobi② 所陈述,并由他在哥尼斯堡的演讲中证明. 第一个发表出来的证明是属于 Eisenstein 的③. 看到这个证明 Jacobi 就声称④,这正是他在他的演讲中给出的,但是 Eisenstein 愤怒地否认了有任何剽窃⑤. 还存在高于四次的同余式的反转定律.

3. 代 数 数

复整数的理论是代数数论这一巨大课题发展方向上的一个阶段. 无论 Euler 或 Lagrange 都没有预想到他们关于复整数的工作所打开的丰富可能性. Gauss 也没有想到.

这个理论产生于要证明 Fermat 关于 $x^n+y^n=z^n$ 的断言的企图之中. $n=3$, 4 和 5 的情况已经讨论过了(第 25 章第 4 节).

---

① *Jour. für Math.*, 28,1844,53~67 和 223~245.

② *Jour. für Math.*, 2,1827,66~69 = *Werke*, 6,233~237.

③ *Jour. für Math.*, 27,1844,289~310.

④ *Jour. für Math.*, 30,1846,166~182, p.172 = *Werke*, 6,254~274.

⑤ *Jour. für Math.*, 35,1847,135~274(p.273).

Gauss 试图证明 $n = 7$ 时的断言，但失败了. 或许因为他厌恶自己的失败，他在 1816 年给 Heinrich W. M. Olbers(1758—1840)的一封信中说："我的确承认，Fermat 定理作为一个孤立的命题对我没有多少兴趣，因为可以容易地立出许多那样的命题，人们既不能证明它们也不能否定它们."$n = 7$ 的特殊情况由 Lamé 在 1839 年予以解决①，而 Dirichlet 建立了 $n = 14$ 的论断②. 但是，一般命题没有被证明.

这个问题由 Ernst Eduard Kummer(1810—1893)接续下来，他从神学转向数学并做了 Gauss 和 Dirichlet 的学生，后来在布雷斯劳(Breslau)和柏林做教授. 虽然 Kummer 的主要工作是在数论方面，但他在几何学方面还做出了漂亮的发现，这起源于光学问题；他在大气对光的反射的研究中也做出了重要的贡献.

Kummer 把 $x^p + y^p$(p 为素数) 分解成

$$(x + y)(x + \alpha y)\cdots(x + \alpha^{p-1} y),$$

这里 α 是一个虚的 p 次单位根. 也就是，α 是

$$\alpha^{p-1} + \alpha^{p-2} + \cdots + \alpha + 1 = 0 \tag{1}$$

的一个根. 这就引导着他把 Gauss 的复整数理论推广到由(1)那样的方程所引进的代数数，即形如

$$f(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_{p-2}\alpha^{p-2}$$

的数，其中每一个 a_i 是通常的(有理)整数. (因为 α 满足(1)，所以 α^{p-1}的项能用低次幂的项来替换.)Kummer 把这样的数 $f(\alpha)$叫做复整数.

在 1843 年 Kummer 对整数、素整数、可除性以及类似东西给出了适当的定义(我们将马上给出标准定义)，然后错误地假定了在他所引进的那类代数数中唯一因子分解成立. 在 1843 年，当他把他的手稿寄给 Dirichlet 的时候，他指出，这个假定对证明 Fer-

① *Jour. de Math.*, 5,1840,195～211.

② *Jour. für Math.*, 9,1832,390～393 = *Werke*, 1,189～194.

mat 定理是必需的. Dirichlet 通知他,唯一因子分解仅对某些素数 p 成立. 附带说一句,对代数数假定唯一因子分解,Cauchy和Lamé也犯了同样的错误. 在 1844 年,Kummer①认识到 Dirichlet 批评的正确性.

为了重建唯一因子分解,Kummer 在 1844 年②开始的一系列论文中创立了理想数的理论. 为理解他的思想起见,我们来考虑 $a+b\sqrt{-5}$ 所生成的域,这里 a, b 是整数. 在这个域中

$$6=2\cdot 3=(1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5}),$$

而且容易证明这四个因子都是素整数. 这时唯一因子分解不成立. 对这个域,让我们引进理想数 $\alpha=\sqrt{2}$, $\beta_1=(1+\sqrt{-5})/\sqrt{2}$, $\beta_2=(1-\sqrt{-5})/\sqrt{2}$. 我们看到, $6=\alpha^2\beta_1\beta_2$. 这样,6 现在唯一地被表示为四个因子的乘积,就域 $a+b\sqrt{-5}$ 而论,这四个因子全是理想数③. 通过这些理想数和其他素数,在这个域中因子分解是唯一的(除去构成可逆元素的因子). 借助于理想数,人们可以证明,在预先缺乏唯一因子分解的所有域中,普通数论的一些结果成立.

Kummer 的理想数虽是普通的数,但是不属于他所引进的代数数类. 而且,理想数也不是以一般方式定义的. 就 Fermat 定理来说,Kummer 用他的理想数确实成功地证明了它对许多素数是正确的. 在前 100 个整数中,只有 37, 59 和 67 不为 Kummer 的证明所包括. 然后,Kummer 在 1857 年的一篇论文中④将他的结果扩展到这些例外素数. 这些结果又进一步地为 Dimitry Mirimanoff(1861—1945)所扩展,他是日内瓦大学的教授,完善了 Kummer 的方法⑤. Mirimanoff 证明了对于直到 256 的每一个 n,

---

① *Jour. de Math.*, 12,1847,185～212.

② *Jour. für Math.*, 35,1847,319～326,327～367.

③ 引进这些理想数后,2 和 3 不再是不可分解的了,因为 $2=\alpha^2$ 而 $3=\beta_1\cdot\beta_2$.

④ *Abh. König. Akad. der Wiss. Berlin*, 1858,41～74.

⑤ *Jour. für Math.*, 128,1905,45～68.

Fermat 定理是正确的,只要 x, y 和 z 与指数 n 互素.

Kummer 是研究由单位根形成的代数数,而 Gauss 的学生 Richard Dedekind(1831—1916)却以全新而有启发性的方式探讨唯一因子分解的问题,他在德国的高等技术学校作为一名教师花费了一生中的 50 个年头. Dedekind 在他所编辑的 Dirichlet 的《数论》(*Zahlentheorie*, 1871)的第二版的附录 10 中,发表了他的结果. 在同一书①的第三版和第四版的附录中他扩展了这些结果. 就是在这里他创立了现代代数数的理论.

Dedekind 的代数数的理论是 Gauss 的复整数和 Kummer 的代数数的一般化,但是这个一般化与 Gauss 的复整数多少有些差别. 一个数 r,若它是方程

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0 \tag{2}$$

的根,而不是次数比 n 低的这种方程的根,则称它是一个 n 次代数数,式中 a_i 是普通整数(正的或负的). 如果在(2)中 x 的最高次幂的系数是 1,则所有的解叫做 n 次代数整数. 代数整数的和、差、积仍是代数整数,并且,如果一个代数整数是有理数,则它是普通整数.

我们应当注意到在新定义之下,一个代数整数可以包括普通分数. 例如 $(-13+\sqrt{-115})/2$ 是一个二次代数整数,因为它是 $x^2+13x+71=0$ 的根. 反之, $(1-\sqrt{-5})/2$ 是一个二次代数数而不是代数整数,因为它是 $2x^2-2x+3=0$ 的根.

Dedekind 接着引进了数域的概念. 这是一个实数或复数的集合 F,满足这样的条件:如果 α, β 属于 F,则 $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$, $\alpha\beta$ 属于 F,而且如果 $\beta\neq 0$, 则 α/β 也属于 F. 每一个数域都包含有理数,因为如果 α 属于这数域,则 α/α 即 1 也属于它,因此 1+1, 1+2 等也都属于它. 不难证明,一切代数数的集合形成一个域.

如果人们从有理数域出发,而 θ 是一个 n 次代数数,则 θ 同自

① 4th ed., 1894 = *Werke*, 3, 2～222.

身及有理数在四种运算之下结合起来所形成的集合也是 n 次域.这个域也可以说成是包含有理数和 θ 的最小域.它也称为有理数的扩域.这样的域不包含所有的代数数,而是一个特殊的代数数域.现在通常记为 $R(\theta)$.虽然人们可以期望 $R(\theta)$ 中的数是商 $f(\theta)/g(\theta)$,其中 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是任何具有有理系数的多项式,人们还是能够证明,如果 θ 是 n 次的,则 $R(\theta)$ 的任何一个数 α 能表成形式

$$\alpha = a_0\theta^{n-1} + a_1\theta^{n-2} + \cdots + a_{n-1},$$

这里 a_i 是普通的有理数.此外,存在着这个域的 n 个代数整数 θ_1, θ_2, …, θ_n,使得这个域中的所有代数整数都有形式

$$A_1\theta_1 + A_2\theta_2 + \cdots + A_n\theta_n,$$

这里 A_i 是普通的正的或负的整数.

环,是 Dedekind 引进的概念,本质上是这样一个集合,即如果 α 和 β 属于这个集合,则 $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$ 和 $\alpha\beta$ 也属于这个集合.所有代数整数的集合形成一个环,任何一个特殊代数数域中的一切代数整数也形成环.

说代数整数 α 能被代数整数 β 整除,如果存在一个代数整数 γ 使得 $\alpha=\beta\gamma$. 如果 j 是一个代数整数,它能整除代数数域中的每一个其他整数,则称 j 是这个域的一个可逆元素.这些可逆元素,其中包括 $+1$ 和 -1,是普通数论中的可逆元素 $+1$ 和 -1 的一般化.如果代数整数 α 不是零或可逆元素,而且如果它分解为 $\beta\gamma$,其中 β 和 γ 属于这同一个代数数域,就蕴含着 β 或 γ 是这个域的可逆元素,则称 α 是一个素数.

现在让我们来看看算术基本定理成立的范围.在一切代数整数所形成的环中没有素数.让我们考虑在特殊的代数数域 $R(\theta)$ 中的整数环,譬如域 $a+b\sqrt{-5}$, 其中 a 和 b 是普通的有理数.在这个域中唯一因子分解不成立.例如

$$21=3\cdot 7=(4+\sqrt{-5})(4-\sqrt{-5})=(1+2\sqrt{-5})(1-2\sqrt{-5}).$$

最后这四个因子中的每一个在如下意义下是素数，即它不能表为形如$(c+d\sqrt{-5})(e+f\sqrt{-5})$的乘积，其中$c$, d, e和f是整数.

另一方面让我们考虑域$a+b\sqrt{6}$，其中a和b是普通的有理数. 如果对这些数实行四种代数运算，则仍得到这种数. 如果限定a和b是整数，则得到这个域的(2次)代数整数. 在这个域中我们可将可逆元素的等价定义取为：若$1/M$也是代数整数，则代数整数M就是可逆元素. 于是1, -1, $5-2\sqrt{6}$和$5+2\sqrt{6}$都是可逆元素. 每个整数都可被任一可逆元素整除. 进而，这个域中的一个代数整数如果仅能被它自己和可逆元素整除，则它是素的. 现在

$$6=2\cdot 3=\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}.$$

看来仿佛不存在素因数的唯一分解. 但是上面所展示的因数不是素数. 事实上，

$$\begin{aligned}6&=2\cdot 3=\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}\\&=(2+\sqrt{6})(-2+\sqrt{6})(3+\sqrt{6})(3-\sqrt{6}).\end{aligned}$$

最后四个因数中的每一个都是这个域中的素数，而唯一分解在这个域中确实是成立的.

在特殊代数数域里的整数环中，代数整数分解为素因数总是可能的，但是唯一分解一般不成立. 事实上，对形如$a+b\sqrt{-D}$的域，其中D可取不为平方数整除的任何正整数值，至少对直到10^9的D，仅当$D=1, 2, 3, 7, 11, 19, 43, 67$和$163$时唯一因子分解定理才是合理的①. 因此代数数本身不具有唯一因子分解的性质.

4. Dedekind 的理想

将代数数的概念一般化之后，Dedekind 立刻用一个和

---

① H. M. Stark 已经证明D的上述值是唯一的一种可能，见他的《论复二次域中的唯一因子分解问题》，*Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, Ⅻ, 41～56, Amer. Math. Soc., 1969.

Kummer 的十分不同的方案去着手重建代数数域中的唯一因子分解.他引进了代数数类去代替理想数,为了纪念 Kummer 的理想数,他把它们称为理想.

在定义 Dedekind 的理想之前让我们注意根本思想.考虑普通的整数.代替整数 2, Dedekind 考虑整数 $2m$ 的类,这里 m 是任何整数.这个类由一切可被 2 整除的整数构成.类似地,3 由一切可被 3 整除的整数 $3n$ 的类代替.积 6 就变成了一切数 $6p$ 的集合,其中 p 是任何整数.这时积 $2 \cdot 3 = 6$ 用下述断语代替:类 $2m$"乘"类 $3n$ 等于类 $6p$.进而言之,类 $2m$ 是类 $6p$ 的因子,而不管在实际上是前者包含后者.这些类是普通整数环中的 Dedekind 称之为理想的例子.为了领会 Dedekind 的工作,人们必须使自己习惯于用数类的术语去思考.

更一般地,Dedekind 把他的理想定义如下:设 K 是一个特殊的代数数域,说 K 的整数 A 的集合形成一个理想,如果当 α 和 β 是这个集合中的任何两个整数时,则整数 $\mu\alpha + \nu\beta$ 也属于这个集合,这里 μ 和 ν 是 K 中的任何其他代数整数.或者这样说,理想 A 是由 K 中的代数整数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 产生的,如果 A 是由一切和

$$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_n\alpha_n$$

所构成,这里 λ_i 是域 K 中的任何整数.这个理想用$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$来表示.零理想只含有数 0,相应地用(0)来表示.单位理想是由数 1 产生的,记为(1).如果理想 A 只是由一个整数 α 产生的,就称它为主理想,所以(α)是由一切被 α 整除的代数整数构成的.在普通的整数环中每一个理想都是主理想.

由整数 2 和 $1+\sqrt{-5}$ 所产生的理想是代数数域 $a+b\sqrt{-5}$ 中的理想的一个例子,这里 a 和 b 是普通的有理数.这个理想由所有形如 $2\mu + (1+\sqrt{-5})\nu$ 的整数构成,这里 μ 和 ν 是这个域中的任意整数.考虑到 $(1+\sqrt{-5})2$ 必定属于 2 所产生的理想这一事实,这个理想是仅由一个数 2 所产生的,所以它恰巧也是主

理想.

如果理想($\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$)中的每一个成员也是理想($\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_q$)的成员,反之也对,则两理想相等. 为了处理因子分解的问题,我们必须首先考虑两个理想的乘积. K 中的理想 $A = (\alpha_1, \cdots, \alpha_s)$ 和理想 $B = (\beta_1, \cdots, \beta_t)$ 的乘积定义为理想

$$AB = (\alpha_1\beta_1, \alpha_1\beta_2, \alpha_2\beta_1, \cdots, \alpha_i\beta_j, \cdots, \alpha_s\beta_t).$$

很明显,这个乘积是可交换的和可结合的. 凭借这个定义,如果存在一个理想 C 使得 $B = AC$, 我们就可以说 A 整除 B,记为 $A|B$,并称 A 是 B 的因子. 正像上面普通整数的例子已经启示的,B 的元素被包含在 A 的元素之中,并且普通的可除性由类的包含所代替.

类似于通常素数的理想称为素理想. 这样的理想 P 定义为除去自身和理想(1)外不含有其他因子的理想,所以 P 不被包含在 K 的任何其他理想之中. 由于这个理由,素理想也被称做是最大的. 所有这些定义和定理都导致关于代数数域 K 的理想的基本定理. 任何一个理想仅能被有限个理想所整除,并且如果一个素理想整除(同一个数类的)两个理想的乘积 AB,则它整除 A 或 B. 最后,理想论中的基本定理是,每一个理想能唯一地分解为素理想.

在关于形如 $a+b\sqrt{D}$ (D 为整数)的代数数域的最早的例子中,我们发现,有些代数数域允许有这些域的代数整数的唯一因子分解,另一些则不允许. 允许或不允许这一问题的答案是由下述定理给出的:代数数域 K 的整数能唯一地分解为素因子的充要条件是,K 中所有的理想都是主理想.

从 Dedekind 著作中的这些例子可以看出,他的理想的理论实际上是普通整数的一般化. 特别是,他的著作提供了代数数域的概念和性质,使别人能够去建立唯一因子分解定理.

Leopold Kronecker(1823—1891)是 Kummer 的得意门生,他接替 Kummer 在柏林大学任教授. 他继续研究代数数的问题,并

沿着类似于 Dedekind 的路线发展了它. Kronecker 的博士论文《论复可逆元素》是他在这个论题上的第一项工作. 这篇论文写于 1845 年,但直到很晚才发表[①]. 论文中讨论在 Gauss 所创立的代数数域中可能存在的所有可逆元素.

Kronecker 创立了另一种域论(有理性域)[②]. 由于他考虑了任意个变量(未定量)的有理函数域,他的域的概念比 Dedekind 的更一般. 特别地,Kronecker 引进了(1881)添加于域的未定量的概念,未定量恰是一个新的抽象量. 用增加未定量去推广域的这种思想,成为他的代数数的理论的基石. 在这里他用了由 Liouville, Cantor 和其他数学家所建立的关于代数数与超越数的差别的知识. 特别是他注意到,如果 x 是域 K 上的一个超越数(x 是一个未定量),则由添加未知量 x 于 K 而得到的域 $K(x)$,也就是包含 K 与 x 的最小域,同构于系数在 K 中的一个变量的有理函数所生成的域 $K[x]$[③]. 他确实强调过,这个未定量仅是一个代数元素,而不是一个分析意义下的变量[④]. 然后他在 1887 年[⑤]证明了,对每一个普通素数 p,在具有有理系数的多项式环 $Q(x)$ 中存在一个相应的素多项式 $p(x)$,它在有理域 Q 中是不可约的. 两个多项式若以给定的素多项式 $p(x)$ 为模同余就认为相等,据此,在 $Q(x)$ 中一切多项式的环就变成了同余类的域,这个域与由添加 $p(x)=0$ 的一个根 δ 于域 K 而产生的代数数域 $K(\delta)$ 具有相同的代数性质. 在这里他用了 Cauchy 曾经用过的思想,即用多项式关于模 x^2+1 同余而引进虚数. 在这同一部著作中他说明了,代数数的理论独立于代数基本定理和完备的实数系的理论.

---

① *Jour. für Math.*, 93, 1882, 1 ~ 52 = *Werke*, 1, 5 ~ 71.

② "Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen," *Jour. für Math.*, 92, 1882, 1 ~ 122 = *Werke*, 2, 237 ~ 387; 也被 G. Reimer 出版, 1882.

③ *Werke*, 2, 253.

④ *Werke*, 2, 339.

⑤ *Jour. für Math.*, 100, 1887, 490 ~ 510 = *Werke*, 3, 211 ~ 240.

在他的域论中(在“Grundzüge”中),其元素是从域 K 出发然后添加未定量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 而形成的,Kronecker 引进了模系的概念,这相当于 Dedekind 理论中的理想. 对 Kronecker 而言,一个模系是 n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的多项式的一个集合 M,具有下述性质:如果 P_1 和 P_2 属于这个集合,则 $P_1 + P_2$ 也属于这个集合. 如果 P 属于这个集合,而 Q 是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的任一多项式,则 QP 也属于这个集合.

模系 M 的一组基(basis)是指 M 的多项式 $B_1, B_2, \cdots$ 的任何一个集合,使得 M 的每一个多项式都可表为形式

$$R_1B_1 + R_2B_2 + \cdots,$$

这里 $R_1, R_2, \cdots$ 是常数或多项式(不必属于 M). 在 Kronecker 的一般域中,可除性理论是依据模系定义的,很像 Dedekind 用理想来定义.

代数数论的工作在 19 世纪以 Hilbert 的“论代数数”的著名报告①为顶峰. 这个报告主要是记述那个世纪内所做的工作的. 但是,Hilbert 重新整理了所有这些早期的理论,并且给出了获得这些结果的新颖、漂亮而强有力的方法. 从大约 1892 年起,他在代数数论中已开始创立的新概念以及关于 Galois 数域的一个新创造也一并组织进这个报告中了. 其后,Hilbert 和许多其他人大大地扩展了代数数论. 但是,这些后来的发展,相对于 Galois 域,相对于 Abel 数域和类域,都刺激着 20 世纪的大量工作,这些都主要是专家们所关心的.

代数数论,本来是研究古老数论中的问题的解的一种方案,自身却变成了一个目的. 它终于在数论和抽象代数之间占据了一席之地. 而现在,数论和近世高等代数也被吸收到代数数论之中了. 当然,代数数论在普通数论中也产生了新的定理.

---

① “Die Theorie der algebraischen Zahlkörper”(代数数域的理论), *Jahres. der Deut. Math.-Ver.*, 4, 1897, 175～546 = *Ges. Abh.*, 1, 63～363.

5. 型的理论

数论中的另一类问题是整数的型表示. 表达式

$$ax^2+2bxy+cy^2, \tag{3}$$

其中 a, b 和 c 是整数,是一个二元型,因为它包含着两个变数;它又是一个二次型,因为它是二次的. 一个数 M 称为用型表出,如果对于 a, b, c, x 和 y 的特殊整数值,上一表达式等于 M. 一个问题是要找一组数,它们能被已给的型或一类型所表出. 逆问题是,已给 M 与已给 a, b 和 c 或某些类的 a, b 和 c,要找能表出 M 的 x 和 y 的值,这也是同等重要的. 后一问题属于 Diophantine 分析,而前一问题也一样可以看成是这一课题的一部分.

在这些问题方面 Euler 得到了一些特殊的结果. Lagrange 却作出了关键性的发现:如果一个数能被一个型所表出,它就能被许多另外的型所表出;他称这些型是等价的. 后者可从原始型用变数变换

$$x=\alpha x'+\beta y',\ y=\gamma x'+\delta y' \tag{4}$$

来得到,这里 α, β, γ 和 δ 都是整数,并且 $\alpha\delta-\beta\gamma=1$. [①]特别是,Lagrange 阐明了,对于一个已给的判别式(discriminant,Gauss 使用了 determinant) b^2-ac,存在着有限个型,使得具有这一判别式的每一个型等价于这有限个型中的一个. 从而所有具有已给判别式的型可被划分归类,每一类由等价于那个类中的一个成员的一切型所构成. 这一结果以及由 Legendre 归纳地得出的一些结果引起了 Gauss 的注意. Gauss 迈出了大胆的一步,从 Lagrange 的著作中抽象出了型的等价的概念,并致力于此. 他的《探讨》的第五节,一个出乎寻常的最大的一节,就是专注于这一课题的.

---

① *Nouv Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1773, 263～312; 与 1775, 323 ff. = *Œuvres*, 3, 693～795.

Gauss 系统化了并扩展了型的理论.他首先定义了型的等价.设用(4)把

$$F = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

变换为型 $F' = a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2.$

那么 $b'^2 - a'c' = (b^2 - ac)(\alpha\delta - \beta\gamma)^2.$

如果现在 $(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 = 1$, 这两个型的判别式就相等了.于是变换(4)的逆变换将同样包含整系数(根据 Cramer 法则),并将 F' 变换为 F. F 和 F' 称为是等价的.如果 $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, 则 F 和 F' 称为固有等价;如果 $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$, 则 F 和 F' 称为非固有等价.

Gauss 证明了一系列关于型的等价的定理.例如,如果 F 等价于 F',而 F' 等价于 F'',则 F 等价于 F''.如果 F 等价于 F',则一个数 M 能被 F 表出就能被 F' 表出,并且表出的方法的个数也一样多.然后他说明,在 F 和 F' 等价的条件下,如何去找从 F 变换为 F' 的所有变换.在 x 和 y 的值是互素的情况,他也找到了已知数 M 被型 F 表出的一切表示.

由定义,两个等价的型的判别式 $D = b^2 - ac$ 有相同的值,然而两个有相等判别式的型却未必等价. Gauss 说明了所有具有一个已给 D 的型可以被划分归类;任一类的成员都是彼此固有等价的.虽然具有一个已给 D 的型的个数是无限的,但是对于一个已给 D 的类的个数却是有限的.在每一类中一个型可被取为代表, Gauss 给出了选择最简单代表的准则.所有以 D 为判别式的型中最简单的型是 $a = 1,\ b = 0,\ c = -D$. 他称这样的型为主要型,它所属的类为主要类.

接着,Gauss 着手研究型的复合(乘积).如果型

$$F = AX^2 + 2BXY + CY^2,$$

在替换 $X = p_1xx' + p_2xy' + p_3x'y + p_4yy',$

$$Y = q_1xx' + q_2xy' + q_3x'y + q_4yy'$$

之下被变换为两个型

$$f = ax^2 + 2bxy + cy^2 \text{ 和 } f' = a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2$$

的乘积,那么就称 F 可被变换为 ff'. 更进一步,如果六个数

$$p_1q_2 - q_1p_2,\ p_1q_3 - q_1p_3,\ p_1q_4 - q_1p_4,$$
$$p_2q_3 - q_2p_3,\ p_2q_4 - q_2p_4,\ p_3q_4 - q_3p_4,$$

没有公因数,则称 F 是型 f 和 f' 的复合.

于是 Gauss 就能证明一个重要定理:如果 f 和 g 属于同一类,而 f' 和 g' 属于同一类,则由 f 和 f' 所复合的型与由 g 和 g' 所复合的型属于同一类. 于是人们就可以谈到由两个(或更多)给定的型的类所复合的型的类. 在这种类的复合中,主要类起了单位类的作用,就是说,如果类 K 与主要类相复合,则得出的类仍将是 K.

Gauss 又转向处理三元二次型

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2,$$

这里系数都是整数,并且作了极类似于他对于二元型所作过的研究. 在二元型的情况,目标是整数的表示. Gauss 对三元型的理论未作深入研究.

关于型的理论的全部工作之目的,已如所述,就是要建立数论中的一些定理. Gauss 在他研究型的过程中表明,这一理论能怎样被用于证明任何多个关于整数的定理,其中包括许多早已被 Euler 和 Lagrange 等人证明过的定理. 例如,Gauss 证明了,任何形如 $4n+1$ 的素数能用一种而且仅是一种方法表示为平方和. 任何形如 $8n+1$ 或 $8n+3$ 的素数能用一种而且仅是一种方法表示为型 x^2+2y^2 (对正整数 x 和 y 而言). 他阐明了如何去找一个已知数 M 在已给型 $ax^2+2bxy+cy^2$ 下的所有表示. 这里假定判别式 D 是一个正的非平方数. 更进一步,如果 K 是一个基本型(a, b 和 c 的值是互素的),带有判别式 D,并且 p 是一个能除尽 D 的素数,那么不能被 p 整除而能被 F 表出的诸数或者都是 p 的二次剩余,或者都是 p 的二次非剩余.

在 Gauss 关于三元二次型的工作所引出的结果中有下述定

理的首次证明:每一个数能表示成三个三角数的和.我们记得,这些数是

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ \cdots,\ \frac{n^2+n}{2},\ \cdots$$

他也重新证明了已被 Lagrange 证明过的定理:任何一个正整数能表示为四个数的平方和.谈到这个结果时值得顺便提一下,1815年 Cauchy 在巴黎科学院宣读了一篇论文,论文中建立了一个首先为 Fermat 所断言的一般性的结果:每一个整数是 k 或低于 k 的 k 角数之和①(一般 k 角数是 $n+(n^2-n)(k-2)/2$).

Gauss 提出的二元的和三元的二次型的代数理论有一个有趣的几何模拟,这是 Gauss 自己首先发端的.出现在 1830 年的《格丁根学报》②上关于 Ludwig August Seeber 写的三元二次型的一本书的书评中,Gauss 概述了他的型和型类的几何表示③.这个工作是所谓数的几何理论的发展的一个开端. Hermann Minkowski (1864—1909)曾历任几个大学的数学教授,当他发表了他的《数的几何》(*Geometrie der Zahlen*, 1896)之后,这一理论才得到显著的地位.

在 19 世纪的数论中,型的理论成为一个主要的课题.关于二元的和三元的二次型以及多元的和高次的型,许多人作了进一步的研究④.

6. 解析数论

数论中的一个重要发展是解析方法和解析成果的导入,以表

---

① *Mém. de l'Acad. des Sci., Paris*, (1), 14, 1813～1815, 177～220 = *Œuvres*, (2), 6, 320～353.

② *Werke*, 2, 188～196.

③ Felix Klein 在他的 *Entwicklung*(见本章末尾的参考书目), pp. 35～39, 阐明了 Gauss 的概述.

④ 进一步的细节见参考文献中 Smith 和 Dickson 的工作.

达和证明有关整数的事实. 实际上,Euler 已经在数论中用了分析(见下面),Jacobi 用椭圆函数得到了同余论和型的理论中的一些结果①. 然而 Euler 在数论中对分析的使用是很少的,Jacobi 的数论成果几乎是他的分析著作的偶然的副产品.

分析的第一个深刻的经过精心考虑的用途是由 Peter Gustav Lejeune-Dirichlet(1805—1859)为了处理一个看来是明白的代数问题而作出的. 他是 Gauss 和 Jacobi 的学生,在布雷斯劳和柏林当教授,后来在格丁根接替 Gauss. Dirichlet 的伟大著作《数论讲义》(*Vorlesungen über Zahlentheorie*)② 详细解释了 Gauss 的《探讨》,并给出了他自己的贡献.

引起 Dirichlet 去应用分析的问题是证明每一个算术序列

$$a,\ a+b,\ a+2b,\ a+3b,\ \cdots,\ a+nb,\ \cdots$$

中包含无穷多个素数,这里 a 和 b 是互素的. Euler③ 和 Legendre④ 作出了这一猜想,在 1808 年 Legendre⑤ 给出了一个证明,但含有错误,在 1837 年 Dirichlet⑥ 给出了一个正确的证明. 这个结果推广了 Euclid 关于在序列 1, 2, 3, …中包含有无穷多个素数的定理,Dirichlet 的分析证明长而又繁. 特别是他用了 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-z}$,现在被称为 Dirichlet 级数,其中 a_n 和 z 都是复数. Dirichlet 还证明了在序列 $\{a+nb\}$ 中的素数的倒数之和是发散的. 这就推广了 Euler 关于通常素数的结果(见下面). 在 1841 年⑦,Dirichlet 证明了一个关于在复数 $a+bi$ 的级数中的素数的一个定理.

---

① *Jour. für Math.*, 37, 1848, 61～94 和 221～254 = *Werke*, 2, 219～288.

② 发表于 1863 年,1871 年、1879 年和 1894 年的二、三、四版由 Dedekind 作了广泛的增补.

③ *Opuscula Analytica*, 2, 1783.

④ *Mém. de l'Acad. des Sci.*, *Paris*, 1785, 465～559, pub. 1788.

⑤ *Théorie des nombres*, 2nd ed., p. 404.

⑥ *Abh. König. Akad. der Wiss.*, *Berlin*, 1837, 45～81 和 108～110 = *Werke*, 1, 307～342.

⑦ *Abh. König. Akad. der Wiss.*, *Berlin*, 1841, 141～161 = *Werke*, 2, 509～532.

围绕着引进分析的主要问题涉及到函数 $\pi(x)$，$\pi(x)$表示不超过 x 的素数的个数. 例如，$\pi(8)$是 4，因为 2，3，5 和 7 是素数，而 $\pi(11)$是 5. 当 x 增加时，增添的素数变得稀疏起来，问题是 $\pi(x)$的固有的分析表达式是什么？Legendre 证明了不存在有理表达式，他曾在一个时期内放弃了可能找到任何表达式的希望. 那时 Euler，Legendre，Gauss 和其他人都推测

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{x/\log x}=1. \tag{5}$$

Gauss 利用素数表(他事实上研究了直到 3 000 000 的一切素数)对 $\pi(x)$作了猜想，并推断[①] $\pi(x)$与 $\int_2^x \mathrm{d}t/\log t$ 的差是很小的. 他还知道

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int_2^x \mathrm{d}t/\log t}{x/\log x}=1.$$

1848 年，彼得格勒大学的教授 Pafnuti L. Tchebycheff (1821—1894)继续研究小于或等于 x 的素数个数的问题，并在这一古老问题上迈出了一大步. 在一篇关键性的论文《论素数》[②]中，Tchebycheff 证明了

$$A_1<\frac{\pi(x)}{x/\log x}<A_2,$$

这里 $0.922<A_1<1$ 和 $1<A_2<1.105$，但是没有证明这个函数趋向于一极限. 这个不等式为许多数学家所改进，这些人中包括 Sylvester，他在 1881 年同其他一些人曾怀疑这个函数有极限. Tchebycheff 在他的著作中，使用了

$$\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z},$$

我们现在把它叫做 Riemann ζ 函数，可是，他是仅对 z 的实值应用

---

① *Werke*, 2, 444～447.

② *Mém. Acad. Sci. St. Peters.*, 7, 1854, 15～33；也见 *Jour. de Math.*, (1), 17, 1852, 366～390 = *Œuvres*, 1, 51～70.

这个函数的.(这个级数是 Dirichlet 级数的一种特殊情况.)在同一篇论文中,他还顺便证明了,对 $n > 3$,在 n 和 $2n-2$ 之间至少总有一个素数存在.

实 z 的 ζ 函数出现在 Euler[①] 的一本著作中,他在其中引进了

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_n^s}\right)^{-1},$$

这里 p_n 都是素数. Euler 用这个函数去证明素数的倒数之和是发散的. 对 s 的偶的正整数值,Euler 知道 $\zeta(s)$ 的值(见第 20 章第 4 节). 然后在一篇宣读于 1749 年的论文[②] 中,Euler 断言对实的 s,

$$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\cos\frac{\pi s}{2}\Gamma(s)\zeta(s).$$

他说他验证这一方程一直到了对它无可怀疑的程度. 这个关系式是由 Riemann 在 1859 年的一篇下面将要提到的论文中建立的. Riemann 用了复数 z 的 ζ 函数去试图证明素数定理,即上面提到的(5)[③]. 他指出,要再深入一步研究,就应当知道 $\zeta(z)$ 的复零点. 实际上,当 $z = x + iy$ 时,$\zeta(z)$ 对 $x \leqslant 1$ 不收敛,而 ζ 在半平面 $x \leqslant 1$ 内的值是由解析开拓定义的. 他叙述了一个假设:ζ 在带形区域 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 中的一切零点都位于 $x = \frac{1}{2}$ 这条线上. 这个假设一直还未被证明[④].

在 1896 年,Hadamard[⑤] 应用(一个复变量的)整函数的理论,以及证明当 $x = 1$ 时 $\zeta(z) \neq 0$ 这一决定性的事实,终于证明了素

---

① *Comm. Acad. Sci. Petrop.*, 9,1737,160～188, pub. 1744 = *Opera*, (1), 14,216～244.

② *Hist. de l'Acad. de Berlin*, 17,1761,83～106, pub. 1768=*Opera*, (1),15,70～90.

③ *Monatsber. Berliner Akad.*, 1859,671～680 = *Werke*, 145～155.

④ 1914 年 Godfrey H. Hardy 证明了 $\zeta(z)$ 有无穷多零点位于直线 $x = \frac{1}{2}$ 上(*Comp. Rend.*, 158,1914,1012～1014 = *Coll. Papers*, 2,6～9).

⑤ *Bull. Soc. Math. de France*, 14,1896,199～220 = *Œuvres*, 1,189～210.

数定理;他研究整函数的目的就在于证明这个素数定理. Charles-Jean de la Vallée Poussin(1866—1962)关于 ζ 函数得到同样的结果,并同时证明了素数定理①. 这个定理是解析数论的中心问题之一.

参考书目

Bachmann, P.: "Über Gauss' zahlentheoretische Arbeiten", *Nachrichten König. Ges. der Wiss. zu Gött.*, 1911, 455～508; also in Gauss: *Werke*, 10_2, 1～69.

Bell, Eric T.: *The Development of Mathematics*, 2nd ed., McGraw-Hill, 1945, Chaps. 9～10.

Carmichael, Robert D.: "Some Recent Researches in the Theory of Numbers", *Amer. Math. Monthly*, 39, 1932, 139～160.

Dedekind, Richard: *Über die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen* (reprint of the eleventh supplement to Dirichlet's *Zahlentheorie*), F. Vieweg und Sohn, 1964.

Dedekind, Richard: *Gesammelte mathematische Werke*, 3 vols., F. Vieweg und Sohn, 1930～1932, Chelsea (reprint), 1968.

Dedekind, Richard: "Sur la théorie des nombres entiers algébriques", *Bull. des Sci. Math.*, (1), 11, 1876, 278～288; (2), 1, 1877, 17～41, 69～92, 144～164, 207～248 = *Ges. math. Werke*, 3, 263～296.

Dickson, Leonard E.: *History of the Theory of Numbers*, 3 vols., Chelsea (reprint), 1951.

Dickson, Leonard E.: *Studies in the Theory of Numbers* (1930), Chelsea (reprint), 1962.

Dickson, Leonard E.: "Fermat's Last Theorem and the Origin and Nature of the Theory of Algebraic Numbers", *Annals. of Math.*, (2), 18, 1917, 161～187.

Dickson, Leonard E. et al.: *Algebraic Numbers*, *Report of Committee on Algebraic Numbers*, National Research Council, 1923 and 1928; Chelsea (reprint), 1967.

Dirichlet, P. G. L.: *Werke* (1889～1897); Chelsea (reprint), 1969, 2 vols.

---

① *Ann. Soc. Sci. Bruxelles*, (1), 20 Part Ⅱ, 1896, 183～256, 281～397.

Dirichlet, P. G. L. and R. Dedekind: *Vorlesungen über Zahlentheorie*, 4th ed., 1894 (contains Dedekind's Supplement); Chelsea (reprint), 1968.

Gauss, C. F.: *Disquisitiones Arithmeticae*, trans. A. A. Clarke, Yale University Press, 1965.

Hasse, H.: "Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper", *Jahres. der Deut. Math. -Verein.*, 35, 1926, 1～55 and 36, 1927, 233～311.

Hilbert, David: "Die Theorie der algebraischen Zahlkörper", *Jahres. der Deut. Math. -Verein.*, 4, 1897, 175～546 = *Gesammelte Abhandlungen*, 1, 63～363.

Klein, Felix: *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, Chelsea (reprint), 1950, Vol. 1.

Kronecker, Leopold: *Werke*, 5 vols. (1895～1931), Chelsea (reprint), 1968. See especially, Vol. 2, pp. 1～10 on the law of quadratic reciprocity.

Kronecker, Leopold: *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen*, G. Reimer, 1882 = *Jour. für Math.*, 92, 1881/1882, 1～122 = *Werke*, 2, 237～388.

Landau, Edmund: *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, B. G. Teubner, 1909, Vol. 1, pp. 1～55.

Mordell, L. J.: "An Introductory Account of the Arithmetical Theory of Algebraic Numbers and its Recent Development", *Amer. Math. Soc. Bull.*, 29, 1923, 445～463.

Reichardt, Hans, ed.: *C. F. Gauss, Leben und Werk*, Haude und Spenersche Verlagsbuchhandlung, 1960, pp. 38～91; also B. G. Teubner, 1957.

Scott, J. F.: *A History of Mathematics*, Taylor and Francis, 1958, Chap. 15.

Smith, David E.: *A Source Book in Mathematics*, Dover (reprint), 1959, Vol. 1, 107～148.

Smith, H. J. S.: Collected Mathematical Papers, 2 vols. (1890～1894), Chelsea (reprint), 1965. Vol. 1 contains Smith's *Report on the Theory of Numbers*, which is also published separately by Chelsea, 1965.

Vandiver, H. S.: "Fermat's Last Theorem", *Amer. Math. Monthly*, 53, 1946, 555～578.

第 35 章

射影几何学的复兴

> 纯粹几何学的学说往往会给出,而在许多问题中会给出一个简单而自然的办法来洞察诸真理的来源,去揭露那连接它们的神秘链索,去使它们独特地、明白地、完全地被认识.
>
> Michel Chasles

1. 对几何学的兴趣的恢复

在 Descartes 和 Fermat 引进解析几何学以后的百余年里,代数的和分析的方法统治了几何学,几乎排斥了综合的方法. 在这段时期,某些人,例如坚持尝试要使微积分严格地奠基于几何学的那些英国数学家,综合地得到过新结果. 几何的方法,优美而且直观上清晰,总是吸引住一些人. 特别是 Maclaurin,他喜爱综合的几何学胜过分析学. 因此,纯粹几何学即使不处在 17、18 世纪最生气勃勃的发展的中心,也还保持着一些活力. 19 世纪初,几位大数学家判定综合几何学过去是被不公平、不明智地忽视了,因而作出积极的努力来复兴和扩展它.

综合方法的新提倡者之一,Jean-Victor Poncelet,是承认旧的纯粹几何学的局限性的. 他说:"解析几何学以其特有的方法提供通用而且一致的手段去解决出现的问题……它得出的结果其普遍性是无止境的,然而另一个[综合几何学]却碰巧才能前进;其办法完全依靠使用者的聪明,其结果几乎总是局限于所考虑的特定图形."但是,Poncelet 不相信综合方法必然这样局限,他提出要创造与解析几何学的威力相匹敌的新的综合方法.

Michel Chasles(1793—1880)是几何方法的另一位大支持者. 在他的《几何方法的起源和发展的历史概述》(*Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, 1837, 这是一篇历史研究,其中 Chasles 声明他因不懂德文而未谈到德国作者)中,他说,当时的以及更早的数学家们曾宣称几何学是一种死的语言,将来不会再有用处和影响. Chasles 不但否定这种说法,而且引完全是分析学家的 Lagrange 为证. 当遇到天体力学中一个很难的问题时,60 岁的 Lagrange 说①:"虽然分析学也许比旧的几何学的(通常被不适当地称为综合的)方法要优越,但是在有一些问题中,后者却显得更优越,部分是由于其内在的清晰,部分是由于其解法的优美平易. 甚至还有一些问题,代数的分析有点不够用,似乎只有综合的方法才能制服."Lagrange 举出的例证是旋转椭球体对其表面或内部一点(单位质量)的引力这个很难的问题. 这个问题曾被 Maclaurin 用纯粹综合的方法解决过.

Chasles 还摘引了比利时天文学家兼统计学家 Lambert Adolphe Quetelet(1796—1874)给他的信. Quetelet 说:"我们的大多数年轻数学家这么轻视纯粹几何学,是不恰当的."他接着说,年轻人嫌其方法缺乏普遍性,他问道,这究竟是几何学的过错还是研究几何学的人的过错呢? 为了克服缺乏普遍性,Chasles 向未来的几何学家提出两条守则. 他们应当把特殊的定理推广成最普遍的(同时还应是最简单而自然的)结果. 其次,他们不应当满足于一个结果的证明,如果他不是一个一般方法或所从属的学说的一部分. 什么叫找到一个定理的真正基础呢? 他说,总是有一个主要的真理的,人们会认出它来,因为别的定理都将通过简单的变换或作为容易的推论而从它得出. 作为知识的基础的伟大的真理总具有简单和直观的特色.

---

① *Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin*, 1773, 121~148, pub. 1775 = *Œuvres*, 3, 617~658.

别的数学家用比较粗鲁的语言攻击分析方法. Carnot 希望"把几何学从分析学的画符样难懂的文字中解放出来". 这个世纪后期,Eduard Study(1862—1922)称坐标几何学的机器似的过程为"坐标磨坊的嘎嘎声".

对几何学中解析方法的反对不只是出于个人的偏好或口味. 首先,一个真正的问题是,到底解析几何学是不是几何学? 因为方法和结果的实质都是代数,它们的几何意义都是隐蔽的. 此外,正像 Chasles 所指出的,分析学以其形式过程全部略去了几何学所不断采取的小步骤. 分析学的快速而且也许是渗透的步伐不显露已经完成了的事情的意义. 起点与最终结果之间的联系是不清楚的. Chasles 问道:"在一门科学的哲理性的、基础的研究中,光知道某件事是对的却不知道它为什么对、不知道它在所属的真理系列中处于什么地位,这难道够吗?"另一方面,几何的方法可以得到简单的、直观上明显的证明和结论.

首先由 Descartes 提出的另一个论点,在 19 世纪还引起共鸣. 几何学被认为是关于空间和现实世界的真理. 代数学和分析学本身,连关于数和函数的重要真理都算不上. 它们不过是达到真理的方法,而且还是矫揉造作的. 对于代数学和分析学的这种看法逐渐在消失. 然而在 19 世纪初这种批评还是强有力的,因为分析的方法还不完善,甚至逻辑上还不健全. 几何学家理直气壮地怀疑解析证明的正确性,贬之为仅供参考的一些结果. 分析学家却只能回嘴说几何的证明是笨拙而不优美的.

论战的结局是纯粹几何学家重申他们在数学中的作用. 恰像是因解析几何学的创立使纯粹几何学被抛弃而向 Descartes 报仇似的,19 世纪初的几何学家们以在几何学的竞赛中胜过 Descartes 作为他们的目标. 分析学家与几何学家之间的对抗如此激烈,以至 Steiner(一位纯粹几何学家)曾威胁要停止为 Crelle 的《数学杂志》写稿,如果 Crelle 继续发表 Plücker 的分析学的文章的话.

复兴综合几何学的刺激主要来自一个人——Gaspard Monge. 我们已经谈到过他对解析几何学和微分几何学的宝贵贡献以及他 1795 至 1809 年间在多科工艺学校的鼓舞人心的讲演. Monge 本人并不企图做更多的事,只不过是想把几何学带回到数学圈子里来,作为分析学结果的有启发性的途径和解释. 他只企图使两种思想方法并重. 然而,他自己的几何学研究和他对几何学的热情在他的学生们, Charles Dupin, François-Joseph Servois, Charles-Julien Brianchon, Jean-Baptiste Biot (1774—1862), Lazare-Nicholas-Marguerite Carnot 和 Jean-Victor Poncelet 之中激发起复兴纯粹几何学的强烈愿望.

Monge 对纯粹几何学的贡献是他的《画法几何学》(*Traité de géométrie descriptive*, 1799). 这门学科是讲怎样把三维物体正交投影到两个(一个水平的、一个垂直的)平面上,使得从这个表示法可以推断该物体的数学性质. 这种图解法适用于建筑学、堡垒设计、透视学、木匠业和石匠业,而且是第一次讨论三维图形到两个二维图形的投影. 画法几何学的思想和方法并没有成为通向几何学后来发展的道路,或者通向数学的任何别的部分的道路.

2. 综合的 Euclid 几何学

虽然 Monge 所鼓动起来的几何学家们去搞射影几何学了,但我们先停下来看看综合的 Euclid 几何学中的一些新成果. 这些成果,或许重要性不大,然而显示出这门古老学科的新的主题和几乎无穷无尽的丰富多彩. 实际上产生了数以百计的新定理,我们只能从中举几个例子.

每个三角形 ABC 有九个特别的点:各边的中点、三条高的垂足、以及各顶点与垂心连线的中点. 这九个点全在一个圆周上,叫

做九点圆. 这定理是Gergonne与 Poncelet 首先发表的①. 它常被归功于 Karl Wilhelm Feuerbach(1800—1834),一位高中教师,他的证明发表在《直边三角形的一些特殊点的性质》(*Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks*, 1822)里. 在这本书里,Feuerbach 添加了关于九点圆的另一个事实. 旁切圆是与一条边和另外二条边的延长线相切的圆. (旁切圆的圆心位于两个外角和较远的那个内角的分角线上.) Feuerbach 的定理说,九点圆与内切圆以及三个旁边圆都相切.

在 1816 年出版的一本小书《平面直边三角形的一些性质》(*Über einige Eigenschaften des ebenen geradlinigen Dreiecks*)中, Crelle 指出怎样在一个三角形内部求一点 P,使得 P 与三角形的顶点的连线和三角形的边作成相等的角. 就是说,在图 35.1 中 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$. 还有另一点 P',使得 $\angle P'AC = \angle P'CB = \angle P'BA$.

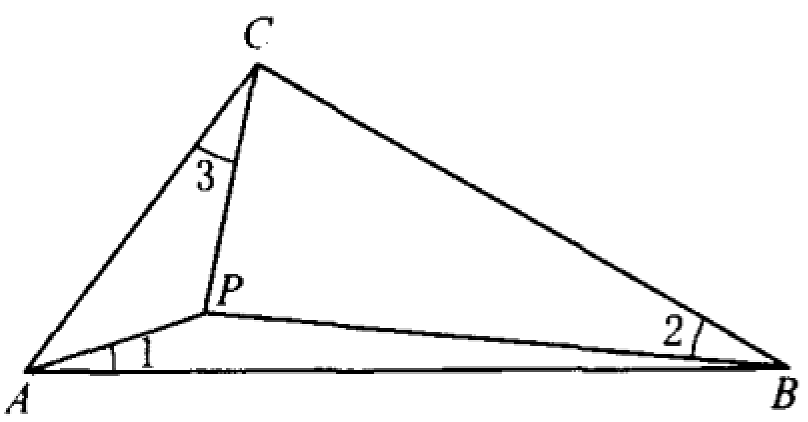


图 35.1

我们知道,圆锥曲线曾被 Apollonius 看做是圆锥的截口而明确地讨论过,后来在 17 世纪又被作为平面上的轨迹引进过. 1822 年 Germinal Dandelin(1794—1847)证明了关于圆锥曲线与圆锥的关系的一个十分有趣的定理②. 他的定理说,如果两个球面内切于一个圆锥并且都与一个已知平面相切,该平面与圆锥交于一条圆锥曲线,那么球面与平面的接触点是圆锥曲线的焦点,球面与圆锥相切的圆所在的平面同已知平面的交线是圆锥曲线的准线.

19 世纪时人们探讨的另一个有趣的主题是用纯几何的方法,也就是不依靠变分法,求解极大极小问题. 在 Jacob Steiner 用综

---

① *Ann. de Math.*, 11, 1820/1821, 205～220.

② *Nouv. Mém. de l'Acad. Roy. des Sci.*, Bruxelles, 2, 1822, 169～202.

合方法证明的几个定理中,最著名的结果是等周定理:在具有一定周长的所有平面图形中,圆周包围着最大的面积. Steiner 给出了各种各样的证明①. 可惜 Steiner 假定了存在着一条曲线它确实包围着最大的面积. Dirichlet 好几次试图说服他,说因此他的证明是不完全的;但是 Steiner 坚持说这是不证自明的. 然而有一次他的确写过(在1842年文章的第一篇中)②:"而如果假定有一个最大的图形,证明就是轻而易举的."

极大化曲线的存在性证明难住了数学家们好些年,直到 Weierstrass 在他1870年代的讲演中求助于变分法③解决了这个问题为止. 其后 Constantin Caratheodory(1873—1950)和 Study④ 在一篇合写的文章中不用变分法而严格化了 Steiner 的证明. 他们的证明(有两个)是直接的,不像 Steiner 的方法是间接的. 在偏微分方程和分析学中做过伟大的工作并曾在包括格丁根和柏林在内的几所大学当过教授的 Hermann Amandus Schwarz,对三维的等周问题给了一个严格的证明⑤.

Steiner 也证明了(在1842年文章的第一篇中)在具有一定周长的所有三角形中,等边三角形具有最大的面积. 他的另一个结果⑥说,如果 A, B, C 是给定的三点(图35.2)并且三角形 ABC 的每个角都小于120°,那么使 $PA+PB+PC$ 最小的点 P 正好使 P 处的每个角都是120°. 但是如果三角形的一个角,比方说角 A,等于或大于120°,那么 P 与 A 重合. 这个结果很早以前 Cavalieri(《六道几何练习题》,1647)就证明过,但 Steiner 一定不知道.

① *Jour. für Math.*, 18, 1838, 281～296;以及 24, 1842, 83～162, 189～250; 1842年的文章收在他的 *Ges. Werke*, 2, 177～308.

② *Ges. Werke*, 2, 197.

③ *Werke*, 7, 257～264, 301～302.

④ *Math. Ann.*, 68, 1909, 133～140 = Caratheodory, *Ges. math. Schriften*, 2, 3～11

⑤ *Nachrichten König. Ges. der Wiss. zu Gött.*, 1884, 1～13 = *Ges. math. Abh*, 2, 327～340.

⑥ *Monatsber. Berliner Akad.*, 1837, 144 = *Ges. Werke*, 2, 93 和 729～731.

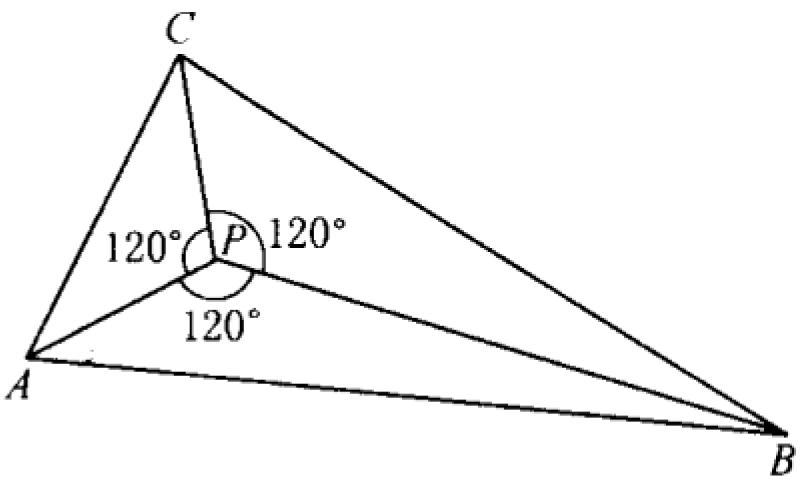


图 35.2

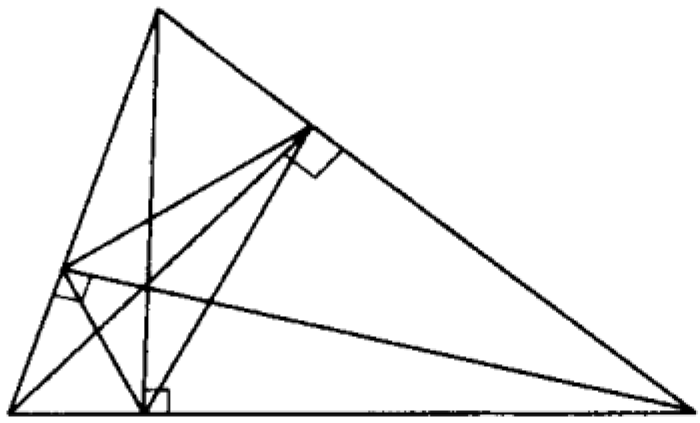


图 35.3

Steiner 也把这结果推广到 n 个点.

Schwarz 解决了下面的问题:已知一个锐角三角形,考虑所有这样的三角形,其每个顶点都在原来那个三角形的三条边上;问题是要找出周长最短的三角形. Schwarz 综合地证明了①这个周长最短的三角形的三顶点就是已知三角形的三个高的垂足(图 35.3)②.

Euclid 几何学的一条新奇的定理,在 1899 年被约翰斯·霍普金斯大学数学教授 Frank Morley 所发现,后来许多人发表了它的证明③. 这定理说,如果画出一个三角形的每个顶角的三等分线,则相邻的三等分线就相交于一个等边三角形的顶点(图 35.4). 新奇处在于涉及角三等分线. 直到 19 世纪中叶,没有一个数学家会去考虑这些线,因为只有可以作图的那些元素和图形才被认为在 Euclid 几何学中是合法的. 可作图性保证了存在性. 然而,关于确立存在性的观念改变了,这一点当我们考察关于 Euclid 几何学的逻辑基础的研究工作时将看得更清楚.

沿着 Mohr 和 Mascheroni(第 12 章第 2 节)所开创的路线,为减少直尺和圆规的使用作了若干努力. Poncelet 在他 1822 年的

---

① 文章未发表, *Ges. Math. Abh.*, 2,344~345.

② Schwarz 的证明可以在 Richard Courant 与 Herbert Robbins 的 *What is Mathematics?* Oxford University Press, 1941, pp. 346~349 中找到. J. F. de Toschi di Fagnano(1715—1797)给出一个不用微积分的证明,见于 *Acta Eruditorum*, 1775, p. 297. 在 Schwarz 之前有过不那么优美的几何的证明.

③ 一个证明,以及已发表的证明的参考资料,见 H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, John Wiley and Sons, 1961, pp. 23~25.

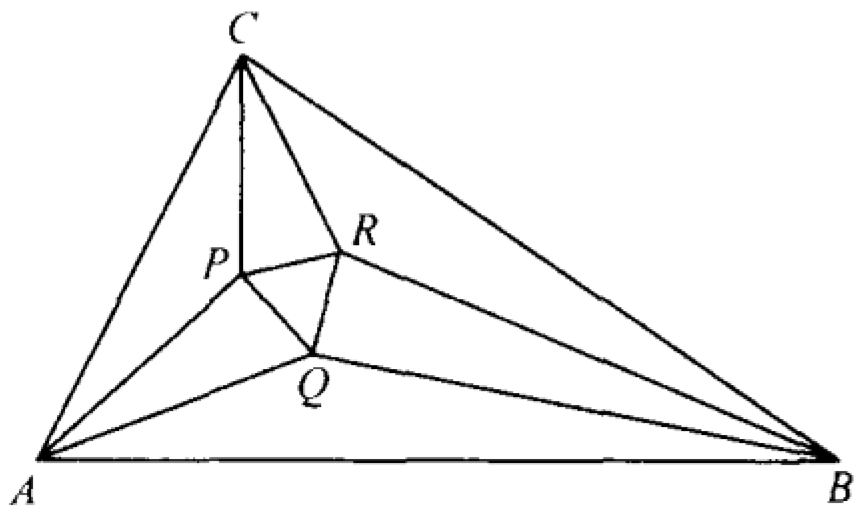


图 35.4

《论著》中证明了能用直尺和圆规做的所有的作图(除了作圆弧以外)都能只用直尺做到,只需事先给我们一个固定的圆及其圆心. Steiner 在一本小书《用直尺和一个定圆进行的几何作图》(*Die geometrischen Constructionen ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises*)① 中更优美地重新证明了这个结果. 虽然 Steiner 这本书是为教育的目的写的,但他在序言里宣称他将证明一位法国数学家表达过的一个猜想.

关于用综合方法证明的 Euclid 几何学定理的上述简短选讲,不应给读者留下解析几何的方法没有人用的印象. 事实上,Gergonne给出了许多几何定理的解析证明,发表在他创办的杂志《数学纪事》(*Annales de Mathématiques*)上.

3. 综合的射影几何学的复兴

Monge 和他的学生从事的主要领域是射影几何学. 这门学科在 17 世纪曾经有过相当活跃然而短暂的突进(第 14 章),但是被解析几何、微积分和分析学的兴起所淹没了. 我们已经提到过, Desargues 1639 年的主要工作被忽略至 1845 年,而 Pascal 关于圆锥曲线的主要论文(1639)一直没有找到. 只有 La Hire 的书可供使用,其中采用了 Desargues 的某些结果. 19 世纪的人常错把从

① 1833 出版 = *Werke*, 1,461~522.

La Hire 的书中学到的东西归功于 La Hire. 但是,整个说来,这些几何学家不知道 Desargues 和 Pascal 的工作而不得不重做.

射影几何学的复兴始于 Lazare N. M. Carnot(1753—1823),他是 Monge 的学生,杰出的物理学家 Sadi Carnot 的父亲. 他的主要著作是《位置的几何学》(*Géométrie de position*, 1803),也写过《关于斜截理论》(*Essai sur la théorie des transversales*, 1806). Monge 赞成联合运用解析几何与纯粹几何,但是 Carnot 拒绝使用解析方法,并开始了纯粹几何学的奋斗. 我们即将充分讨论的想法有许多在 Carnot 的书中至少是提过的. 如 Monge 称之为偶然关系的原理(又通称为相关原理或者更常被称为连续性原理)那里面就有. 为了避免对不同大小的角和不同方向的直线用不同的图,Carnot 不使用他认为有矛盾的负数,却引进了一套复杂的图表,称为"正负号的对应".

19 世纪初期的射影几何研究者中,我们只提 François Joseph Servois 和 Charles-Julien Brianchon(1785—1864),他们两人都把他们的工作应用于军事问题. 虽然他们出了力重建、整理和扩充旧的结果,可是重要的新定理只有 Brianchon 的著名结果①,即还是他在多科工艺学校当学生时证明的. 这定理说,如果一个圆锥曲线的六条切线(图 35.5)形成一个外切六边形,那么连结相对顶点的三条线通过同一点. Brianchon 用配极关系导出了这个定理.

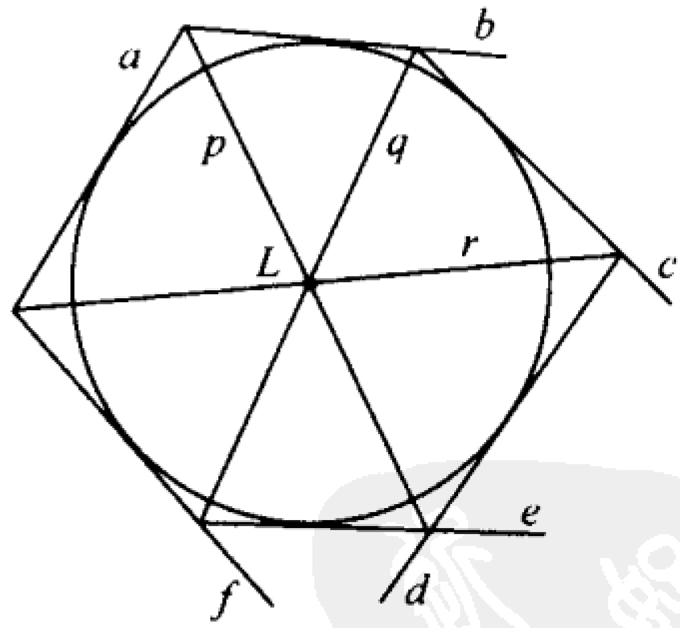


图 35.5

射影几何学的复兴从 Poncelet(1788—1867)得到主要的动力. Poncelet 是 Monge 的学生,他也从 Carnot 那里学了许多. 当他

① *Jour. de l'Ecole Poly.*, 6, 1806, 297~311.

在 Napoleon 的远征军中做军官时，他被俘并在俄国萨拉托夫(Saratoff)监狱里渡过了 1813—1814 年. 在那里，Poncelet 不借助任何书本，重作了他从 Monge 和 Carnot 那里学到的东西，然后着手创造新的结果. 后来他扩充并修订了这个工作，发表为《论图形的射影性质》(*Traité des propriétés projectives des figures*, 1822). 这个工作是他对于射影几何学和对于创立新学科的主要贡献. 在他后来的生涯中，不得已而把大量的时间用于政府事务，虽然在不长的时期内他还保持着教授的职位.

Poncelet 成了综合几何学的最热心的支持者，他甚至攻击分析学家. 他曾与分析学家 Joseph-Diez Gergonne(1771—1859)友好，并曾在 Gergonne 的《数学纪事》上发表过文章，但是他的攻击不久也指向 Gergonne 了. Poncelet 深信纯粹几何学的独立性和重要性. 虽然他承认分析学的威力，但他相信能够赋予综合几何学以同样的威力. 在 1818 年的一篇文章(发表在 Gergonne 的《纪事》上①)里，他说，解析方法的威力不在于运用代数而在于它的普遍性，这个优越性产生于这样的事实：从一个典型的图形发现的度量性质，对于由这典型的或基本的图形派生出来的所有图形都仍然适用，顶多改变一下正负号. 这种普遍性在综合几何学里能由连续性原理(我们即将讲它)得到保证.

Poncelet 是充分认识到射影几何学具有独特方法和目标的新数学分支的第一位数学家. 17 世纪的射影几何学家讨论特殊问题，而 Poncelet 却考虑一般问题，探索几何图形任一投影的所有截影所共有的那些性质，亦即在投射与截影下保持不变的性质. 这就是他和他的后继者们研究的主题. 由于距离和角度在投影与截影下是会改变的，所以 Poncelet 选择并发展了对合与调和点列的理论，而不是交比的概念. Monge 在他的工作中用了平行投影；像

---

① *Ann. de Math.*, 8, 1817/1818, 141～155. 这篇文章重印在 Poncelet 的 *Applications d'analyse et de géométrie*(1862—1864)中，2, 466～476.

Desargues,Pascal,Newton 和 Lambert 一样,Poncelet 用中心投影,即从一个点投影. Poncelet 把这个概念提高成为研究几何问题的一种方法. Poncelet 也考虑了从一个空间图形到另一个空间图形的射影变换,当然是用纯几何的方式. 这时他好像对射影性质失去了兴趣,而更关心这方法在浮雕和舞台设计中的运用.

他的工作以三个观念为中心. 第一个是透射的图形. 两个图形是透射的,如果一个能够从另一个经过一次投射与截影(这叫做透视对应)或一连串投影与截影(这叫做射影对应)得出. 他运用透射图形的方法是,对于一个给定的图形,找一个比较简单的透射的图形,研究后者以找出它在投射与截影下不变的性质,这样来获得原来那比较复杂的图形的性质. 这个方法的实质曾被 Desargues 和 Pascal 使用过,Poncelet 在他的《论图形的射影性质》里赞扬过 Desargues在这方面及其他方面的创见.

Poncelet 的第二个主导的观念是连续性原理. 在他的《论图形》里他是这样说的:“如果一个图形从另一个图形经过连续的变化得出,并且后者与前者一样地一般,那么可以马上断定,第一个图形的任何性质第二个图形也有.”怎样判定这两个图形都是一般的呢? 他没有解释. Poncelet 的原理也断定,若一个图形退化了,譬如六边形的一边趋于零而退化成五边形,则原来图形的任何性质都会转化成关于那退化图形的一个适当措辞的命题.

这原理对 Poncelet 来说其实不是新的,在概括的哲学意义下,要追溯到 Leibniz,他在 1687 年说,当两件事的已知条件的差别能变得任意地小时,其结果的差别也能变得小于任意给定的量. 从 Leibniz 以来这原理一直得到承认和运用. Monge 开始用连续性原理来论证定理. 他想要证明一个普遍的定理,却采用图形的一个特殊位置来证它,然后声称这定理是普遍成立的,甚至当该图形里的某些元素变成**虚的**时候也成立. 例如,要证明关于线与曲面的一个定理,他就在线与曲面相交时证它,然后声称即使线与曲面不

相交,交点变成虚的时候,结论也成立. 无论 Monge 还是 Carnot(他也用过这原理)都没有为它提出过任何根据.

制造了"连续性原理"这个术语的 Poncelet,把这原理抬高成绝对的真理,并在他的《论图形》中大胆地应用. 为了"论证"它是可靠的,他举出圆的相交弦的两段之积相等这条定理,说,当交点移到圆外时,得出关于割线与其圆外段之积相等的定理. 还有,当一条割线变成切线时,切线与其圆外段变得相等,它们的积仍等于另一条割线与其圆外段的积. 这一切都是挺有道理的,但是 Poncelet 应用这原理来证明许多定理,并且像 Monge 一样,引申这原理去谈论虚的图形. (以后我们将提到一些例子.)

巴黎科学院的别的院士们批评这连续性原理,认为它只具有启发的意义. 特别是 Cauchy,他批评这原理,但遗憾的是他的批评指向 Poncelet 的应用,而在那里这原理确实是有效的. 批评者也指出,Poncelet 等人对这原理的信心其实是来源于它有代数上的依据. 事实上,Poncelet 在狱中的笔记表明他确曾用分析学来检验这原理的可靠性. 顺便说一下,这些笔记由 Poncelet 写好并由他分成两卷出版,题为《分析学与几何学的应用》(*Applications d'analyse et de géométrie*, 1862—1864),其实这是他 1822 年的《论图形》的修订版,而且在后面这一著作中他的确使用了解析方法. Poncelet 承认能够从代数上证明这原理,但他坚持认为这原理并不依赖于这样一个证明. 然而可以相当肯定的是,Poncelet 依靠了代数的方法去弄清事情的究竟,然后又以这原理为依据来肯定几何的结果.

Chasles 在他的《概述》里为 Poncelet 辩护. Chasles 的论点是,代数是这原理的事后诸葛亮的(由结果追溯原因的)证明. 然而,他留下伏笔,指出必须小心,不要把**本质上**依赖于元素的虚实的性质从一个图形转移到另一图形上去. 例如圆锥的一个截口可能是双曲线,因而它有渐近线. 当截口是一个椭圆时,渐近线就成

了虚的. 因此不应去证明一个只同渐近线有关的结果,因为渐近线依赖于截口的特殊种类. 也不应把抛物线的结果转移到双曲线上去,因为在抛物线的情形,截割平面并不在一般位置. 接着,他讨论了有公共弦的两个相交圆的问题. 当两圆不再相交时,公共弦成虚的. 他说,其实公共弦通过两个实点这件事是一种附带的或偶然的性质. 必须以某种办法来定义这条弦,要不依赖于当两圆相交时它通过实交点这件事,而要是任意位置的两个圆都恒有的性质. 例如可以定义它为(实的)根轴,意思是这条线上的任何点到那两个圆的切线长都相等;也可以利用这么个性质来定义它,即以这条线上任何点为圆心能画一个圆与那两个圆都垂直相交.

Chasles 也坚决主张连续性原理适用于处理几何里的虚元素. 他先解释几何里的虚是什么意思. 虚元素属于一个图形的某一种情形或状态,在其中某些成分不再存在,而在这图形的另一状态中这些成分是实的. 他接着说,因为,若不同时想想这些量是实量时的那些有关的状态,就不会有虚量的观念. 后面说的这些状态,他叫做"偶然的"状态,提供了理解几何里的虚元素的钥匙. 要证明关于虚元素的结果,只需取图形的一般位置,其中该元素是实的,然后,依据偶然关系原理或者说连续性原理,可以推断当该元素是虚的时候结果也成立. "这样就看出,虚元素的运用和考虑是完全正当的."19 世纪时,连续性原理被承认为直观上明显的,因而具有公理的地位. 几何学家们随意使用它,从来不认为它需要证明.

虽然 Poncelet 用连续性原理去断定关于虚点和虚线的结果,但他从未给出过这些元素的一般定义. 为了引进某些虚点,他给了复杂的、不十分清晰的几何意义. 当我们从代数的观点来讨论它们时,我们会更容易理解这些虚元素. 尽管 Poncelet 的方法缺乏清晰性,但引进圆上无穷远点的概念还得归功于他,那是任何两个圆都共有的、位于无穷远直线上的两个虚点[①]. 他还引进了任两球面

---

① *Traité*, 1,48.

都共有的球上无穷远圆. 他接着证明,两条不相交的实圆锥曲线有两条虚的公共弦,两条圆锥曲线交于四个点,或实或虚.

Poncelet 的工作中第三个主导观念是关于圆锥曲线的极点与极线的概念. 这概念起源于 Apollonius,并在 17 世纪的射影几何学工作中被 Desargues(第 14 章第 3 节)及其他人用过. Euler,Legendre,Monge,Servois 和 Brianchon 也已用过它. 但是 Poncelet 给出了从极点到极线和从极线到极点的变换的一般表述,并且在他 1822 年的《论图形》和他在 1824 年提交巴黎科学院的《论配极的一般理论》[①]中用作建立许多定理的方法.

Poncelet 研究关于圆锥曲线的配极的目的之一是要建立对偶原理. 射影几何的研究者们曾经注意到,涉及平面图形的定理如果把"点"换成"线"、"线"换成"点"重述一遍,不但话谈得通,而且竟是正确的. 这样重述所得出的定理为什么还成立? 其原因当时是不清楚的,并且 Brianchon 事实上还怀疑过这个原理. Poncelet 想,配极关系是其原因.

然而,这个配极关系需要一个圆锥曲线作中介. Gergonne[②]坚决主张这对偶原理是一个普遍原理,适用于除了涉及度量性质者外的一切陈述和定理. 极点和极线是不必要的中间支撑物. 他引进了"对偶性"这个术语来表示原来定理与新定理之间的关系. 他也注意到在三维的情形中点与面是对偶的元素,而线与它自己对偶.

为了说明 Gergonne 对于对偶原理的理解,我们来考察他是怎样对偶化 Desargues 的三角形定理的. 首先我们应注意三角形的对偶是什么. 三角形由不在同一条直线上的三个点,以及连结它们的三条线组成. 对偶的图形则由不在同一个点上的三条线,以及连结它们的三个点(交点)组成. 这对偶的图形又是一个三角形,所

---

① *Jour. für Math.*, 4,1829,1～71.

② *Ann. de Math.*, 16,1825～1826,209～231.

以三角形称为是自对偶的. Gergonne 发明了把对偶的定理写成两栏的格式,把对偶的命题并排写在原来命题的旁边.

现在让我们考虑 Desargues 定理,这时两个三角形和点 O 在一个平面里,我们来看看把点与线对换会得出什么结果. Gergonne在刚才提到过的 1825—1826 年的文章中把这个定理及其对偶写成:

Desargues 定理	Desargues 定理的对偶
如果有两个三角形,连结对应顶点的线过同一个点 O,那么对应边相交的三个点在同一条线上.	如果有两个三角形,连结对应边的点在同一条线 O 上,那么对应顶点相连的三条线过同一个点.

这里,对偶定理是原来定理的逆定理.

Gergonne 对一般对偶原理的表述是有点含糊的、有缺陷的. 虽然他深信它是一个普遍的原理,但他不能证明它,而 Poncelet 正确地反对了这些缺陷. 他还与 Gergonne 争发现这原理的优先权(这实在是属于 Poncelet 的),甚至谴责 Gergonne 剽窃. 然而, Poncelet 确实要依靠配极,却不肯承认 Gergonne 在认识这原理的更广的应用方面前进了一步. 后来, Poncelet, Gergonne, Möbius, Chasles 和 Plücker 之间开展的讨论完全弄清了这原理. Möbius 在他的《重心计算》(*Der barycentrische Calcul*)中,后来还有 Plücker,都很好地说明了对偶原理与配极的关系:对偶的概念和圆锥曲线、二次型无关,但当后者能用时,就与配极一致. 这时期还没有得到一般对偶原理的逻辑证明.

Jacob Steiner(1796—1863)推进了射影几何的综合的发展. 他是接受法国的尤其是 Poncelet 的观念,偏爱综合方法以至嫌恶分析学的一个德国几何学派的第一个人. 他是一个瑞士农民的儿子,19 岁以前一直在农场干活. 虽然他大多是自学的,但他终于成

了柏林的教授.他年轻时是裴斯泰洛齐学校的教师,深感培养几何直观之重要.裴斯泰洛齐原则是在教师引导下,并采用 Socrates 方法(即问答法——译者注),让学生创造数学. Steiner 走到极端,他教几何不用图,在黑屋子里培养研究生.在其后期的工作中, Steiner 把英国的及其他杂志上发表的定理和证明拿过来,在他自己的著作中从不声明他的成果已有人建树.他早年做过好的创造性的工作,并企图维持他的多产的名声.

他的主要著作是《几何形的相互依赖性的系统发展》(*Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischen Gestalten von einander*, 1832),他的主要原理是运用射影的概念从简单的结构(如点、线、线束、面、面束)建造出更复杂的结构.他的结果不是特别新的,但他的方法是新的.

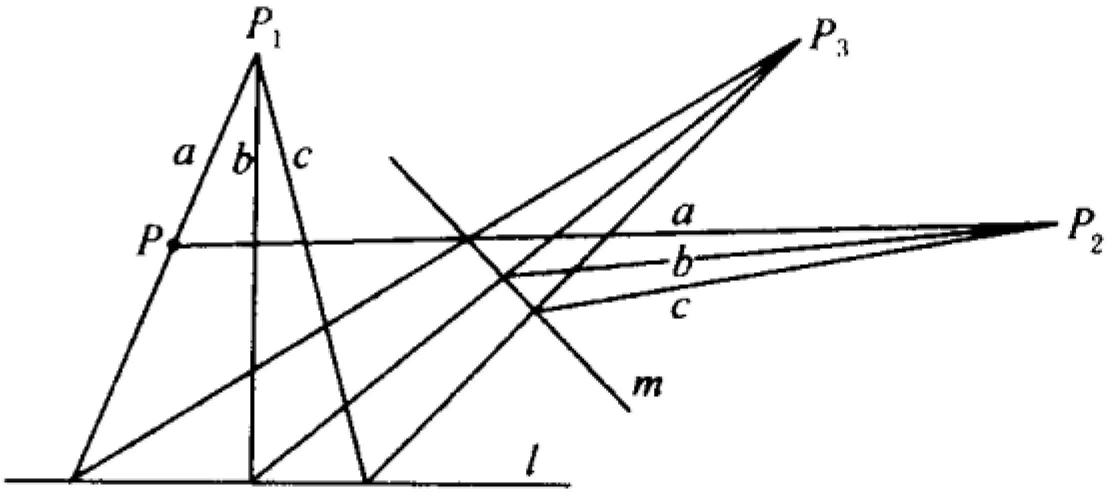


图 35.6

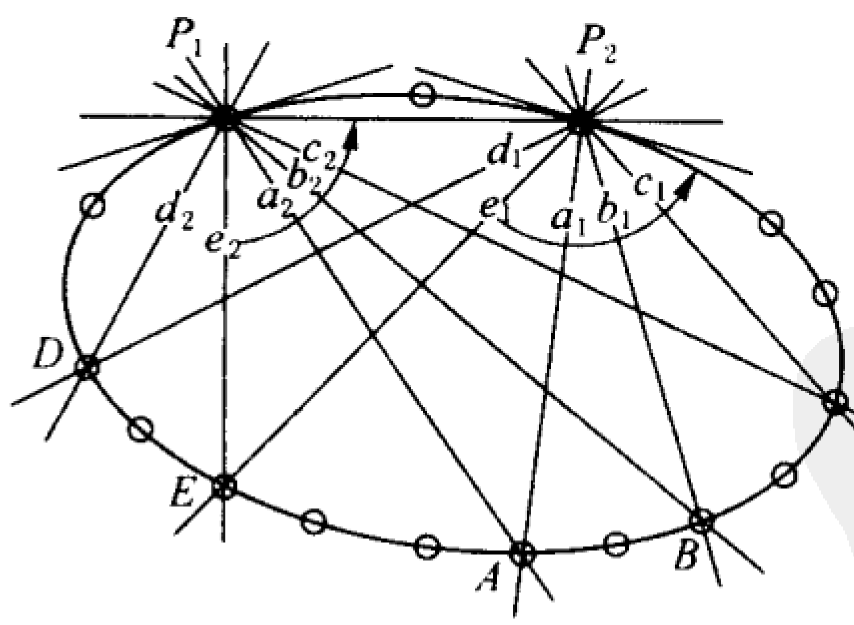


图 35.7

为解释他的原理，我们来考察他的定义圆锥曲线的射影方法，这现已成为标准的方法. 从两个线束(共点的线族)P_1，P_3 出发(图 35.6)，设它们是通过线 l 上的点束透视相关的；设线束 P_3 与 P_2 是通过另一条线 m 上的点束透视相关的. 这时线束 P_1 与 P_2 就说是射影相关的. 以 P_1 为中心的线束和以 P_2 为中心的线束中标着 a 的线，是在两个线束 P_1 与 P_2 间的射影对应下互相对应的线的例子. 圆锥曲线现在就定义为两个射影相关的线束的所有各对对应线的交点的集合. 例如 P 是曲线上的一个点，而且，这曲线通过 P_1 和 P_2(图 35.7). 就这样，Steiner 用较简单的形、线束，造出了圆锥曲线或二次曲线. 但是，他并未证明他的曲线与圆锥的截口是一回事.

他也以类似的方式造出了直纹的二次曲面、单叶双曲面和双曲抛物面，用射影对应作为他的定义的基础. 实际上对整个射影几何来说他的方法还不够普遍.

在证明中他采用交比作为基本工具. 然而他不采用虚元素，称之为"幽灵"或者"几何的鬼影". 他也不采用带负号的量，虽然 Möbius(他的工作我们很快要讲)已经引进了它们.

Steiner 在他的工作中从一开头就使用对偶原理. 例如他把圆锥曲线的定义对偶化，得到一种新结构，称为线曲线. 如果从两个射影相关的(但非透视相关的)点束出发，那么连结这两个点束中对应点的线族(图 35.8)称为一个线圆锥曲线. 这样的线束也刻画

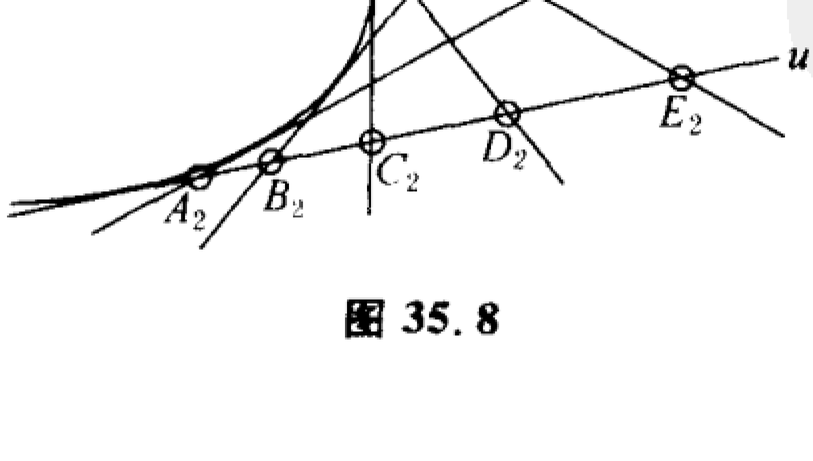


图 35.8

出一条曲线,为了区别起见,作为点的轨迹的通常的曲线称为点曲线. 点曲线的诸切线是一个线曲线,在圆锥曲线的情形就构成对偶曲线. 反过来,每个线圆锥曲线包络着一个点圆锥曲线,或者说它是一个点圆锥曲线的切线集体.

用 Steiner 的点圆锥曲线的对偶的概念,可以把许多定理对偶化. 让我们举 Pascal 定理来形成它的对偶命题. 我们把定理写在左边,新的命题写在右边.

Pascal 定理	Pascal 定理的对偶
在点圆锥曲线上取六个点 A, B, C, D, E, F,则	在线圆锥曲线上取六条线 a, b, c, d, e, f,则
A, B 的连线与 D, E 的连线相交得一点 P;	a, b 的交点与 d, e 的交点相连得一线 p;
B, C 的连线与 E, F 的连线相交得一点 Q;	b, c 的交点与 e, f 的交点相连得一线 q;
C, D 的连线与 F, A 的连线相交得一点 R.	c, d 的交点与 f, a 的交点相连得一线 r.
P, Q, R 三点在一条线 l 上.	p, q, r 三线通过同一点 L.

第 14 章的图 14.12 解说了 Pascal 定理. 其对偶就是 Brianchon 利用配极关系发现的定理(图 35.5). Steiner,像 Gergonne 一样,没有建立对偶原理的逻辑基础. 然而,他在前进过程中,通过把图形分类和注重对偶命题而系统地发展了射影几何学. 他还充分研究了二次曲线和二次曲面.

毕生献身于几何学的 Michel Chasles 继续 Poncelet 和 Steiner 的工作,虽然他个人并不知道 Steiner 的工作,因为我们曾经说过,Chasles 不能读德文. Chasles 在他的《论高等几何》(*Traité de géométrie supérieure*, 1852)和《论圆锥曲线》(*Traité des sec-*

tions coniques, 1865)中提出了他自己的想法. 由于 Chasles 的许多工作或者无意地重复了 Steiner 的,或者被更普遍的概念所更替,所以我们只讲应归功于他的少数主要结果.

Chasles 从他弄懂 Euclid 的失传的著作《衍论》(*Porisms*)的努力中得到交比的观念(虽然 Steiner 和 Möbius 已经重新引进了它). Desargues 也用过这概念,但是 Chasles 只知道 La Hire 写过的有关的东西. Chasles 不知什么时候还得知 Pappus 有这观念,因为在他的《概述》的札记 IX(p. 302)里他提到 Pappus 用了这观念. 这个领域中 Chasles 的结果之一[1]是,圆锥曲线上四个固定点与这圆锥曲线上的任意的第五点确定的四条线有相同的交比.

1828 年 Chasles[2] 给出了定理:已知两个共线点集成一一对应,使得一条线上任四点的交比等于另一条线上的对应点的交比,那么连结对应点的那些线是一个圆锥曲线的切线,那圆锥曲线与这两条已知线也相切. 这结果等价于 Steiner 的线圆锥曲线的定义,因为这里的交比条件保证了两个共线点集是射影相关的,连结对应点的那些线就是 Steiner 的线圆锥曲线的那些线.

Chasles 指出,从对偶原理来看,在平面射影几何学的发展中,线可以同点一样基本,并相信 Poncelet 和 Gergonne 对这一点是清楚的. Chasles 也引进了新的术语. 他把交比叫做非调和比. 他引进"单应"这个术语来描述平面到自身或到别的平面的、把点变成点、线变成线的变换. 这个术语包含了透射的或者射影相关的图形. 他加了一个条件,要求变换保持交比不变,但这件事是能够证明的. 把点变成线、线变成点的变换他叫做对射.

虽然 Chasles 为纯粹的几何学辩护,但他却是解析地思考然后几何地陈述他的证明和结果的. 这种方法称为"混合法",后来别人也使用.

---

① *Correspondance mathématique et physique*, 5,1829,6～22.

② *Correspondance mathématique et physique*, 4,1828,363～371.

1850 年前后,射影几何学与 Euclid 几何学相区别的一般概念和目的是清楚的;可是这两种几何学的逻辑关系并没有弄清楚. 从 Desargues 到 Chasles,射影几何里用了长度的概念. 事实上,交比的概念就是用长度定义的. 但长度不是射影概念,因为它在射影变换下不是不变的. Karl Georg Christian von Staudt(1798—1867)是埃尔兰根(Erlangen)的教授,他对逻辑基础有兴趣,决心使射影几何摆脱对长度和叠合的依靠. 他的方案在他的《位置的几何学》(*Geometrie der Lage*, 1847)中提出,实质上是在射影的基础上引进一种类似长度的东西. 他的方案叫做"投的代数"(the algebra of throws). 在直线上任选三个点,给它们指定符号 0, 1, ∞. 然后用一种(来自 Möbius 的)几何作图法——"投",给任意一点 P 配上一个符号.

为了看看这作图法在 Euclid 几何里相当于什么,我们从直线上标着 0 和 1 的点(图 35.9)出发. 过一条平行线上的一点 M 作 $0M$,然后,作 $1N$ 平行于 $0M$. 再画出 $1M$,作 $N2$ 平行于 $1M$. 显然 $01 = 12$,因为平行四边形对边相等. 这样就用几何作图把 01 的长度转到 12 了.

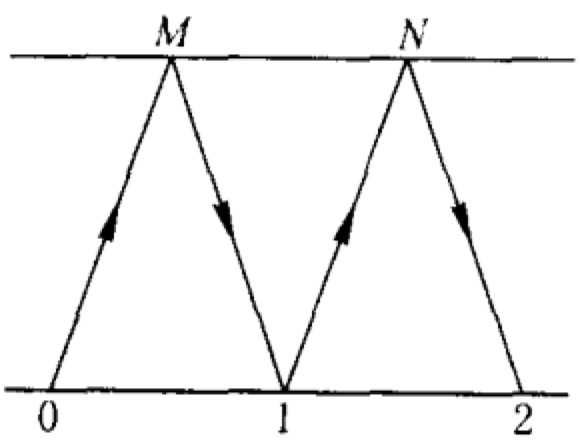


图 35.9

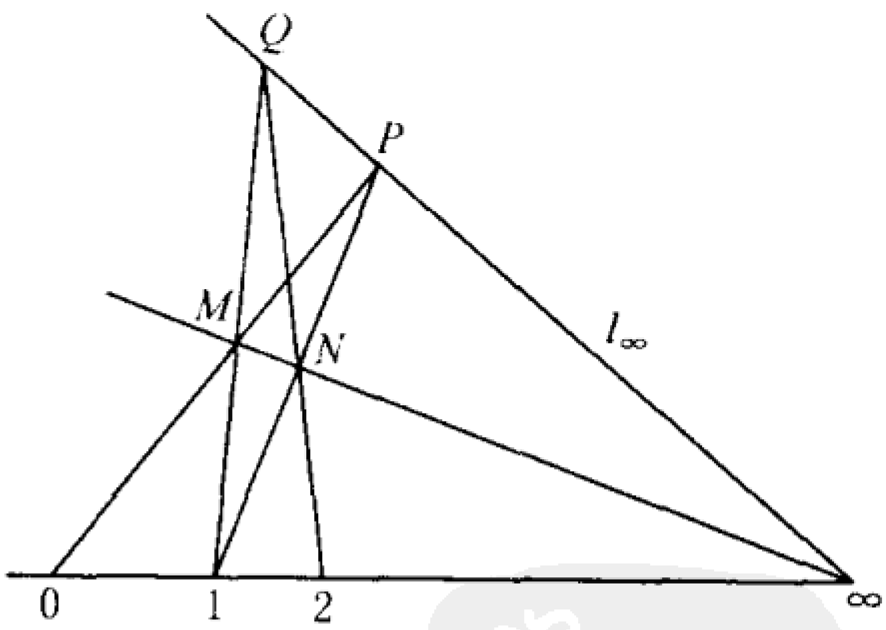


图 35.10

现在来看射影的情况. 从三个点 0, 1, ∞(图 35.10)出发. 点∞在无穷远直线 l_∞ 上,但在射影几何中这不过是一条普通的线. 取一点 M,过 M 作一条"平行"于 01 的线. 这意思是过 M 的那条

线应该与 01 在∞相交，所以我们画出 $M\infty$. 作 $0M$ 并延长它直到与 l_∞ 相交. 然后过 1 作 $0M$ 的"平行线". 这意思是过 1 的那条"平行线"应该与 $0M$ 相交在 l_∞ 上. 这样我们得到 $1P$ 线，从而确定出 N 来. 再画出 $1M$ 并延长它直到与 l_∞ 相交于 Q. 过 N 而"平行"于 $1M$ 的线是 QN，我们就得到它与 01 的交点，标上 2.

用这种作图法能给 01∞线上的点配上"有理数坐标". 要把无理数配给线上的点，必须引进连续性公理(第 41 章). 这概念当时尚未被很好地了解，因而 von Staudt 的工作不够严密.

Von Staudt 给线上的点指定坐标并未用长度. 他的坐标虽是通常的数的记号，却只是充当点的有系统性的识别符号. 所以要加或减这种"数"时，von Staudt 不能使用算术的法则. 他用几何作图来定义这些符号的运算，举例说，使得数 2 和 3 相加得数 5. 这些运算服从通常的数的一切规律. 这样，他的符号或坐标就能当作普通的数来处理，虽则它们是几何地造出来的.

给他的点配上这些标号以后，von Staudt 就能定义四个点的交比. 如果这四点的坐标是 x_1，x_2，x_3，x_4，那么交比定义为

$$\frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_4}\bigg/\frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_4}.$$

这样，von Staudt 不依靠长度和叠合的概念就得到了建立射影几何的基本工具.

交比是 −1 的四点叫做调和集. 在调和集的基础上 von Staudt 给出基本定义：两个点束是射影相关的. 如果在一一对应之下调和集对应于调和集. 四条共点的线构成一个调和集，如果它们与任一斜截线的交点是一个调和点集. 于是两个线束的射影对应也能定义了. 利用这些概念，von Staudt 定义了平面到自身的直射变换为点到点、线到线的一一变换，并证明它把调和集变成调和集.

在他的《位置的几何学》里，von Staudt 的主要贡献是指出射

影几何学其实比 Euclid 几何学还基本. 它的概念从逻辑上看是前提. 这本书和他的《位置的几何学论丛》(*Beiträge zur Geometrie der Lage*, 1856,1857,1860)显示了射影几何学是与距离无关的学科. 然而,他还是用了 Euclid 几何学的平行公理,从逻辑的观点看来这是个缺点,因为平行性不是射影不变的. 这个缺点是 Felix Klein① 消除的.

4. 代数的射影几何学

在综合几何学家们发展射影几何学的同时,代数几何学家们沿用自己的方法也研究这同一个学科. 新的代数概念中最早的是现在所称的齐次坐标. 方案之一是 Augustus Ferdinand Möbius (1790—1868)创立的,他像 Gauss 和 Hamilton 一样,是一个天文学家,但是他把大量的时间用于数学. 虽然 Möbius 没有参加综合方法与代数方法之争,但他的贡献却是在代数方面.

他用坐标表示平面上的点的方案,发表在他的主要著作《重心计算》②中. 他从一个固定的三角形出发,对这平面的任一点 P,考虑在三角形的三个顶点上各放多少质量能使这三个质量的重心在 P,就取这三个量作为 P 的坐标. 当 P 在这三角形外面时,坐标之一或之二可以是负的. 当这三个质量乘以同一个常数时 P 仍是重心. 所以在 Möbius 的方案中,点的坐标不是唯一的;三个坐标之比才是确定的. 这个方案用于空间的点时需要四个坐标. 在这个坐标系里写出的曲线和曲面的方程是齐次的,即所有各项的次数都相同. 稍后我们就会看到运用齐次坐标的例子.

Möbius 把从平面到平面或从空间到空间的变换分成类型. 如果对应的图形相等,变换就是叠合变换;如果对应的图形相似,变

① *Math. Ann.*, 6,1873,112～145 = *Ges. Abh.*, 1,311～343. 又见第38章第3节.

② 1827 发表 = *Werke*, 1,1～388.

换就是相似变换.再普遍一些的是保持平行性但不保持长度和形状的变换,这类型称为仿射变换(Euler 引进的一个概念).最普遍的是把直线变成直线的变换,他把它叫做直射变换. Möbius 在《重心计算》中证明每个直射变换是一个射影变换;就是说,它能从一连串透视变换得出.他的证明假定变换是一对一而且连续的,但是连续性条件能够减弱.他还给出这种变换的一种解析表示式. Möbius 指出,可以在上述的每一类型变换下考虑图形的不变性质.

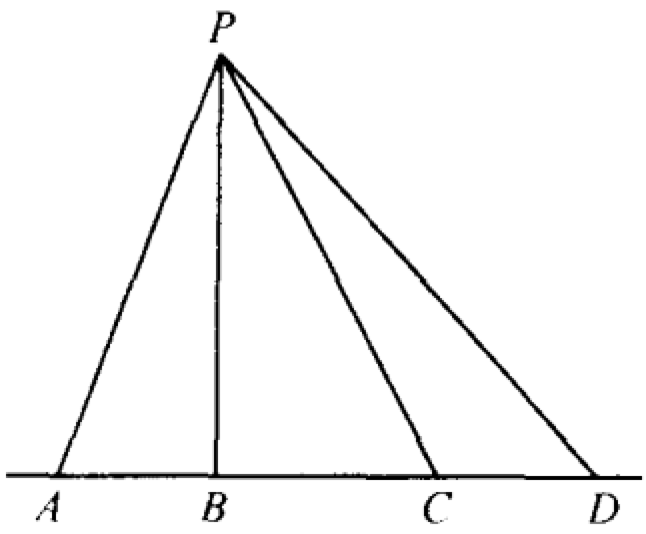


图 35.11

Möbius 在几何里不仅对线段而且对面积和体积,引进了带正负号的元素.因此对于在同一线上四点的带正负号的交比这一概念他能给出完善的处理.他还指出,线束中四条线的交比可以用顶点 P 处各角(图 35.11)的正弦表示为

$$\frac{\sin APB}{\sin APC}\Big/\frac{\sin BPD}{\sin CPD},$$

并且这个比值与任何斜截线所截得的四点 A, B, C, D 的交比是相同的.所以交比在投射与截影下不改变. Möbius 还缓慢地发展出许多别的观念,然而没有推进得很远.

赋予射影几何的代数方法以效率和活力的人是 Julius Plücker(1801—1868).在好几所学校当数学教授之后,1836 年起,他一直是波恩的数学与物理学教授. Plücker 主要是一个物理学家,其实是一个实验物理学家,在那个领域里有许多有名的发现. 1863 年以后,他重新献身于数学.

Plücker 也引进了齐次坐标,但与 Möbius 的方式不同.他的第一个概念是三线坐标[①],也见于他的《解析几何的发展》(*Analy-*

---

① *Jour. für Math.*, 5,1830, 1 ~ 36 = *Wiss. Abh.*, 1,124~158.

tisch-geometrische Entwickelungen, 1828, 1831)的第二卷. 他从一个固定的三角形出发,任一点 P 的坐标取为从 P 到该三角形各边的带正负号的垂直距离;各距离可以乘以同一个常数. 后来在第二卷里他引进一个特殊情况,相当于把三角形的一条边看成无穷远直线. 这等价于把通常笛卡儿坐标 x 和 y 换成 $x = x_1/x_3$ 和 $y = x_2/x_3$,因而曲线的方程变得对 x_1, x_2, x_3 为齐次的. 后面这个概念是后来较广泛地采用的.

利用齐次坐标,并且利用关于齐次函数的 Euler 定理,即若 $f(tx_1, tx_2, tx_3) = t^n f(x_1, x_2, x_3)$,则

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} = nf(x_1, x_2, x_3),$$

Plücker 能够给几何观念以优美的代数表示. 例如若 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ 是一个圆锥曲线的方程,其中(x_1, x_2, x_3)是这圆锥曲线上的点的坐标,那么方程

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}x_1' + \frac{\partial f}{\partial x_2}x_2' + \frac{\partial f}{\partial x_3}x_3' = 0,$$

当把 x_1', x_2', x_3'看成流动坐标时,可以解释为点(x_1, x_2, x_3)处的切线方程,而当把 x_1, x_2, x_3 看成流动坐标时,则是任意点(x_1', x_2', x_3')相对于该圆锥曲线的极线的方程.

利用齐次坐标,Plücker 给出了无穷远线、圆上无穷远点及其他概念的代数表述. 在齐次坐标系(x_1, x_2, x_3)中,无穷远线的方程是 $x_3 = 0$. 这条线在射影几何里并不是异常的,但是在我们关于几何元素的直观模型中,Euclid 平面的每个寻常点落在一个有穷位置上,由 $x = x_1/x_3$ 与 $y = x_2/x_3$ 确定,因而我们不得不把 $x_3 = 0$ 上的点看成无穷远的.

在通过 $x = x_1/x_3$, $y = x_2/x_3$ 引进齐次笛卡儿坐标 x_1, x_2, x_3 之后,圆的方程

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

变成

$$(x_1 - ax_3)^2 + (x_2 - bx_3)^2 = r^2 x_3^2.$$

由于无穷远线的方程是 $x_3=0$，所以这条线与圆的交点由

$$x_1^2+x_2^2=0,\ x_3=0$$

确定，而这乃是圆上无穷远点的方程. 这些点的坐标是(1, i, 0)和(1, −i, 0)，或者是正比于它们的三个数. 类似地，球面上的无穷远圆的方程是

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0,\ x_4=0.$$

如果我们把直线方程写成齐次形式(我们用 x, y, z 代替 x_1, x_2, x_3)

$$Ax+By+Cz=0,$$

并且要求该线通过点(x_1, y_1, z_1)和(1, i, 0)，那么所得的该线的非齐次方程是

$$x-x_0+\mathrm{i}(y-y_0)=0,$$

其中 $x_0=x_1/z_1$, $y_0=y_1/z_1$. 同样，通过(x_1, y_1, z_1)和(1, −i, 0)的线的方程是

$$x-x_0-\mathrm{i}(y-y_0)=0.$$

这两条线都与自身相垂直，因为斜率等于其负倒数. Sophus Lie 称它们为飘渺线；现在称为迷向线.

Plücker 从代数上处理对偶性的努力使他得到一个漂亮的观念，线坐标①. 如果一条直线在齐次坐标中的方程是

$$ux+vy+wz=0,$$

u, v, w 或与它们成比例的三个数就是这条线的坐标②. 于是正像方程 $f(x_1, x_2, x_3)=0$ 表示一些点的集体那样，$f(u, v, w)=0$ 表示一些线的集体，或者一个线曲线.

用这种线坐标的概念，Plücker 就能给对偶原理一个代数的表述和证明. 给定任一方程 $f(r, s, t)=0$，如果把 r, s, t 解释为点

---

① *Jour. für Math.*, 6, 1830, 107～146 = *Wiss. Abh.*, 1, 178～219.

② 译注：这一句原书为"如果一条直线在齐次坐标中的方程是 $ux+vy+wz=0$，又如果 x, y, z 是固定量，那么 u, v, w 或与它们成比例的三个数就是这平面上的一条线的坐标."当 x, y, z 是固定量时，Plücker 的原著说(Wiss. Abh., 1, 179)："方程 $au+bv+cw=0$ 表示一个点."

的齐次坐标 x_1, x_2, x_3,我们就得到一个点曲线的方程;如果把它们解释为 u, v, w,我们就得出对偶的线曲线. 用代数的过程证明的关于点曲线的任何一个性质都引出关于线曲线的对偶的性质,因为在变量的两种解释下,代数是相同的.

Plücker 在这 1830 年的第二篇文章和他的《发展》第二卷中还指出,看做点的集合的一条曲线同时也能看成这曲线的切线的集合,因为这些切线也像那些点一样确定了曲线的形状. 切线族是一条线曲线,在线坐标里有一个方程. 这个方程的次数叫做曲线的类数,而曲线在点坐标里的方程的次数叫做曲线的阶数.

5. 高次平面曲线和高次曲面

18 世纪的人对高于二次的曲线曾经做过一些工作(第 23 章第 3 节),但是从 1750 年到 1825 年这门学科处于休眠状态. Plücker 研究了三次和四次曲线,并且在这工作中放手使用了射影的概念.

在他的《解析几何的体系》(*System der analytischen Geometrie*, 1834)中,他采用了一个虽然方便却不很有根据的原理来建立曲线的标准型. 譬如说,为了证明一般的四阶(次)曲线能化成一种特定的标准型,他推理说,如果两种形式中常数的个数相同,就能把一种形式化成另一种. 这样,他推理说四阶的三元(三个变量的)形式总能化成

$$C_4 = pqrs + \mu\Omega^2$$

的形状,其中 p, q, r, s 是线性形式,Ω 是二次型,这是因为等式两边都包含 14 个常数. 在他的方程里 μ 和各系数都是实数.

Plücker 还研究了曲线的交点的个数,这是 18 世纪也做过的题目. 他用 Lamé 1818 年在一本书里引进的办法,把通过两条 n 次曲线 C_n' 和 C_n'' 的交点的所有曲线组成的曲线族表示出来. 通过

这些交点的任何曲线 C_n 都能表示成

$$C_n = C_n' + \lambda C_n'' = 0,$$

这是 λ 是参数.

用这个办法,Plücker 给 Cramer 诗论(第 23 章第 3 节)一个清楚的解释. 一条一般的曲线 C_n 被 $n(n+3)/2$ 个点所确定,因为这是它的方程中本质的系数的个数. 另一方面,由于两条 C_n 相交于 n^2 个点,过其中 $n(n+3)/2$ 个交点的会有无穷多条别的 C_n. Plücker 解释了这表面上的矛盾①. 任何两条 n 次曲线的确相交于 n^2 个点. 然而只有 $(n/2)(n+3)-1$ 个点是互相独立的. 换句话说,如果我们取两条 n 次曲线通过这 $(n/2)(n+3)-1$ 个点,那么过这些点的其他任何一条 n 次曲线,将通过它俩的 n^2 个交点中的其余 $(n-1)(n-2)/2$ 个. 例如当 $n=4$ 时,有 13 个点互相独立. 通过这 13 个点的任何两条曲线定出 16 个点,但是过这 13 个点的其他任何一条曲线一定通过其余那三个点.

然后 Plücker 研究了② m 次曲线与 n 次曲线的相交理论. 他把后者看成是固定的,交它的那条曲线是变动的. 采用缩写记号 C_n 表示 n 次曲线的表达式,别的曲线也用类似的记号,对于 $m>n$ 的情形,他写成

$$C_m = C_m' + A_{m-n}C_n = 0,$$

使得 A_{m-n} 是 $m-n$ 次多项式. 从这方程,Plücker 得到确定 C_n 与一切 m 次曲线的交点的正确方法. 由于根据这方程有 $m-n+1$ (A_{m-n} 中系数的个数)条线性无关的曲线通过 C_m' 与 C_n 的交点, Plücker 的结论是,在 C_n 上给定任意 $mn-(n-1)(n-2)/2$ 个点, C_n 与 C_m 的 mn 个交点中其余 $(n-1)(n-2)/2$ 个就确定了. 差不多同时 Jacobi③ 也得到这同一结果.

---

① *Annales de Math.*, 19,1828, 97 ~ 106 = *Wiss. Abh.*, 1,76~82.

② *Jour. für Math.*, 16,1837,47~54.

③ *Jour. für Math.*, 15,1836, 285 ~ 308 = *Werke*, 3,329~354.

Plücker 在他 1834 年的《体系》中，后来在他的《代数曲线论》(*Theorie der algebraischen Curven*, 1839)中更明确地给出了现在所谓的 Plücker 公式，把曲线的阶数 n 和类数 k 与简单奇点联系起来. 设 d 是二重点(一种奇点，在那里两条切线不相同)的个数，r 是尖点的个数. 在线曲线中，二重点对应于二重切线(一条二重切线其实是两个不同的点处的切线)，其个数设为 t. 尖点对应于密接切线(在拐点穿过曲线的切线)，其个数设为 w. Plücker 证明了下列对偶的公式：

$$k = n(n-1) - 2d - 3r,\quad n = k(k-1) - 2t - 3w,$$

$$w = 3n(n-2) - 6d - 8r,\quad r = 3k(k-2) - 6t - 8w.$$

每种元素的个数都包括实的和虚的在内.

于是，在 $n = 3$, $d = 0$, $r = 0$ 的情形，拐点的个数 w 该是 9. 到 Plücker 时，De Gua 和 Maclaurin 已证明了通过一般三次曲线的两个拐点的直线一定通过第三个拐点，而且从 Clairaut 的时候起就已假定了一般的 C_3 有三个实的拐点这件事. 在 1834 年的《体系》里，Plücker 证明了，每个 C_3 或者有一个或者有三个实的拐点；在后一种情况下，它们在一直线上. 他还得到把复的元素算在内的更一般的结果. 一般 C_3 有九个拐点，其中六个是虚的. 为了推导这个结果，他利用他的数常数个数的原理证明了

$$C_3 = fgh - l^3,$$

这里 f, g, h, l 都是线性形式，并且导出了 De Gua 和 Maclaurin 的结果. 然后他证明了(推理不完全)，C_3 的九个拐点三个三个在一条线上，一共就有 12 条这样的线. 在几所大学当过教授的 Ludwig Otto Hesse(1811—1874)补全了 Plücker 的证明①，并且指出那 12 条线可以分成四个三角形.

作为发现曲线一般性质的另一个例子，我们再考虑 n 次曲线 $f(x, y) = 0$ 的拐点问题. Plücker 把普通微积分中对于 $y = f(x)$

---

① *Jour. für Math.*, 28, 1844, 97～107 = *Ges. Abh.*, 123～135.

的拐点条件 $d^2y/dx^2=0$ 表示成适用于 $f(x, y)=0$ 的形式,并得到一个 $3n-4$ 次的方程.由于原曲线与新曲线必有 $n(3n-4)$ 个交点,故原曲线似乎该有 $n(3n-4)$ 个拐点.因为这数太大了,Plücker 设想那 $3n-4$ 次方程的曲线与原曲线 $f=0$ 的 n 个无穷支中的每一支都有一个切接触,从而公共点中有 $2n$ 个不是拐点,这就得出正确的个数 $3n(n-2)$. Hesse 利用齐次坐标阐明了这件事①;他把 x 换成 x_1/x_3 , y 换成 x_2/x_3 ,利用关于齐次函数的 Euler 定理,他证明了拐点的 Plücker 方程能写成

$$H=\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}=0,$$

这里的下标表示偏导数.这个方程是 $3(n-2)$ 次的,所以与 n 次方程 $f(x_1, x_2, x_3)=0$ 交于正确个数的拐点.这行列式本身称为 f 的 Hesse 式,是 Hesse 引进的一个概念②.

Plücker,以及其他人,研究了四次曲线.他第一个发现(《论代数曲线》,1839)这种曲线有 28 条二重切线,其中至多八条是实的.后来 Jacobi③ 证明 n 阶曲线一般有 $n(n-2)(n^2-9)/2$ 条二重切线.

代数几何学的工作也包括空间中的图形.虽然空间中直线的表示式已由 Euler 和 Cauchy 引进,Plücker 在他的《空间几何学的体系》(*System der Geometrie des Raumes*, 1846)里引进一种修改了的形式

$$x=rz+\rho,\ y=sz+\sigma,$$

这里的四个参数 r, ρ, s, σ 确定了该直线.可以用线来造出整个空间,因为,举例说,平面无非是线的集合,而点是线的交点.然后 Plücker 说,如果把线看做空间的基本元素,空间就是四维的,因为

① *Jour. für Math.*, 41, 1851, 272～284 = *Ges. Abh.*, 263～278.

② *Jour. für Math.*, 28, 1844, 68～96 = *Ges. Abh.*, 89～122.

③ *Jour. für Math.*, 40, 1850, 237～260 = *Werke*, 3, 517～542.

要用线来盖住全空间需要四个参数.他放弃了四维点空间的概念,认为它太形而上学了.维数依赖于空间元素,这是新的思想.

空间图形的研究包括了三次和四次曲面.直纹曲面是由一条直线按照某种规律运动而生成的.双曲抛物面(马鞍面)和单叶双曲面就是例子,螺旋面也是.如果一个二次曲面包含一条直线,它就包含无穷多条线,并且是直纹曲面.(这时它必定是锥面、柱面、双曲抛物面或单叶双曲面.)然而这对三次曲面不正确.

作为三次曲面的惊人的性质的例子,有1849年Cayley的发现[①],每个三次曲线上恰存在27条直线.它们不一定全都是实的,但是对某些曲面它们全是实的.Clebsch 1871年给过一个例子[②].这些线有特别的性质.例如,每条与别的10条相交.有许多进一步的工作研究了三次曲面上的这些线.

在关于四次曲面的发现中,Kummer的一个结果值得一提.他研究过表示光线的直线族,在考虑连带的焦曲面[③]时他引进了一个四次曲面(而且类数是四),有16个二重点和16个二重平面,它是一个二阶的光线族的焦曲面.这个曲面称为Kummer曲面,包含那表示各向异性介质中光传播的波前的Fresnel波曲面为特例.

19世纪上半叶在综合的和代数的射影几何学上所作的工作,开辟了各种几何学研究的一个光辉灿烂的时期.综合的几何学家们统治着这个时期.他们力求从每一新的结果中发现某种普遍原理,这些原理常常不能从几何上得到证明,然而他们从这些原理得到的彼此联系着并同一般原理联系着的结论多如泉涌.幸而,代数的方法也被引进了,而且,如我们将看到的,终于统治了这个领域.可是我们要把射影几何的历史断开,去考虑一些革命性的新创造,

---

① *Cambridge and Dublin Math. Jour.*, 4,1849, 118～132 = *Math. Papers*, 1,445～456.

② *Math. Ann.*, 4,1871,284～345.

③ *Monatsber. Berliner Akad.*, 1864,246～260,495～499.

它们影响了几何学中以后的所有工作,实际上还根本改变了数学的面貌.

参 考 书 目

Berzolari, Luigi: "Allgemeine Theorie der höheren ebenen algebraischen Kurven", *Encyk. der Math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1903～1915, III C4, 313～455.

Boyer, Carl B.: *History of Analytic Geometry*, Scripta Mathematica, 1956, Chaps. 8～9.

Brill, A., and M. Noether: "Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit", *Jahres. der Deut. Math.-Verein.*, 3, 1892/1893, 109～566, 287～312 in particular.

Cajori, Florian: *A History of Mathematics*, 2nd ed., Macmillan, 1919, pp. 286～302, 309～314.

Coolidge, Julian L.: *A Treatise on the Circle and the Sphere*, Oxford University Press, 1916.

Coolidge, Julian L.: *A History of Geometrical Methods*, Dover (reprint), 1963, Book I, Chap. 5 and Book II, Chap. 2.

Coolidge, Julian L.: *A History of the Conic Sections and Quadric Surfaces*, Dover (reprint), 1968.

Coolidge, Julian L.: "The Rise and Fall of Projective Geometry", *American Mathematical Monthly*, 41, 1934, 217～228.

Fano, G.: "Gegensatz von synthetischer und analytischer Geometrie in seiner historischen Entwicklung im XIX. Jahrhundert", *Encyk. der Math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1907～1910, III AB4a, 221～288.

Klein, Felix: *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint*, Macmillan, 1939; Dover (reprint), 1945, Geometry, Part 2.

Kötter, Ernst: "Die Entwickelung der synthetischen Geometrie von Monge bis auf Staudt", 1847, *Jahres. der Deut. Math.-Verein.*, Vol. 5, Part II, 1896 (pub. 1901), 1～486.

Möbius, August F.: *Der barycentrische Calcul* (1827), Georg Olms (reprint), 1968. Also in Vol. 1 of *Gesammelte Werke*, pp. 1～388.

Möbius, August F.: *Gesammelte Werke*, 4 vols., S. Hirzel, 1885—1887; Springer-Verlag (reprint), 1967.

Plücker, Julius: *Gesammelte wissenschaftliche Abhandlungen*, 2 vols., B. G. Teubner, 1895～1896.

Schoenflies, A.: "Projektive Geometrie", *Encyk. der Math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1907～1910, III AB5, 389～480.

Smith, David Eugene: *A Source Book in Mathematics*, Dover (reprint), 1959, Vol. 2, pp. 315～323, 331～345, 670～676.

Steiner, Jacob: *Geometrical Constructions With a Ruler* (a translation of his 1833 book), Scripta Mathematica, 1950.

Steiner, Jacob: *Gesammelte Werke*, 2 vols., G. Reimer, 1881～1882; Chelsea (reprint), 1971.

Zacharias, M: "Elementargeometrie and elementare nicht-euklidische Geometrie in synthetischer Behandlung", *Encyk. der Math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1907～1910, III, AB9, 859～1172.

第 36 章

非 Euclid 几何

……因为那似乎是对的,很多事物仿佛都有那么一个时期,届时它们就在很多地方同时被人们发现了,正如在春季看到紫罗兰处处开放一样.

Wolfgang Bolyai

人们所推崇于数学真理的必然性,甚至归属于它的特殊的确定性,只是一种错觉.

John Stuart Mill

1. 引　　言

在 19 世纪所有复杂的技术创造中间,最深刻的一个,非 Euclid 几何学,在技术上是最简单的. 这个创造引起数学的一些重要新分支,但它的最重要影响是迫使数学家们从根本上改变对数学的性质的理解,以及对它和物质世界的关系的理解,并引出关于数学基础的许多问题,这些问题在 20 世纪仍然进行着争论. 以下将看到,非 Euclid 几何是在 Euclid 几何领域中,一系列长期努力所达到的顶点. 这个工作到 19 世纪早期就成熟了,正是射影几何也在恢复和发展的同一年代,然而这两个领域在当时彼此并无关联.

2. 1800 年左右 Euclid 几何的情况

虽然希腊人已经承认抽象的或数学的空间是不同于感性认识

的空间,而 Newton 也强调指出了这一点①,但直到1800年左右,所有的数学家都认为 Euclid 几何是物质空间和此空间内图形性质的正确理想化.实际上正如前已指出过的,很多人想把逻辑基础模糊的算术、代数和分析,建立在 Euclid 几何之上,从而保证这些分支的真理性.

很多人确实说出了绝对信任 Euclid 几何为真理的话.例如 Isaac Barrow 把他的数学包括微积分在内都建立在几何基础之上,对几何的肯定性列举了八项理由:概念清晰,定义明确,公理直观可靠而且普遍成立,公设清楚可信且易于想象,公理数目少,引出量的方式易于接受,证明顺序自然,避免未知事物.

Barrow 确曾提出问题:何以确知几何原理可应用于自然界?其回答是,这些原理来自内在理性(innate reason).感觉到的事物只是起了唤醒它们的作用物.再者几何原理早为长期经验所不断证实,并将继续如此,因为上帝创造的世界是万古不易的.于是几何是完备的与肯定无疑的科学.

17世纪末和18世纪的哲学家也理所当然地提出:何以确知 Newton 科学所产生的大量知识是正确的.几乎所有的哲学家,著名的如 Hobbes, Locke 和 Leibniz 等人,都回答说,数学定律和 Euclid 几何一样,是宇宙设计中所固有的.诚然,Leibniz 在区分可能世界与真实世界时确实还留有怀疑的余地.但只有 David Hume 是个重要的例外,他在《人性论》(*Treatise of Human Nature*, 1739)中否认宇宙中的事物有一定法则或必然的先后顺序,他争辩说,这些先后顺序只是观察的结果,而人类却由此断定它们将永远以同样方式出现.科学是纯粹经验性的.特别是 Euclid 几何的定律未必是物理的真理.

Hume 的影响为 Immanuel Kant 所否定并实际上为 Kant 所取代,Kant 对于为什么确知 Euclid 几何能应用于物质世界这一

---

① *Principia*,卷Ⅰ,定义8,Scholium.

问题的回答,写在他的《纯粹理性批判》(*Critique of Pure Reason*, 1781)书中,是一个特殊的答案. 他主张我们的意识提供空间和时间的某些组织模式,他称之为直观,并认为经验按照此模式或直观被意识所吸收与组织. 我们的意识是生来如此,迫使我们只按一种方式来观察外部世界. 因此关于空间的某些原理是先于经验而存在的. 这些原理及其逻辑推论 Kant 称之为先验综合真理,它们也就是 Euclid 的原理与推论. 我们认识外部世界性质的唯一方式就是我们的意识迫使我们解释它的方式. 据上述理由 Kant 断言,而其同时代人也承认,物质世界必然是 Euclid 式的. 总之无论诉之于经验,或依赖于固有真理或者接受 Kant 的观点,都一致认为 Euclid 几何是唯一的与必然的.

3. 平行公理的研究

从公元前 300 年直到 1800 年间,人们虽始终坚信,Euclid 几何是物理空间的正确理想化,但是在那样长的几乎整个时期之内,数学家却始终对一件事耿耿于心. Euclid 用的公理对于物理空间和对该空间的图形,都应看作是不证自明的真理,而按照 Euclid 那样方式陈述的平行公理(第 4 章第 3 节)却被人认为有些过于复杂. 虽说没有人怀疑它的真理性,却缺乏像其他公理那样说服力,即使 Euclid 自己,显然也不喜欢他对平行公理的那种说法,因为他只是在证完了无需用平行公理的所有定理之后才使用它.

关于在物质空间里是否可假定存在无限直线这个与此有关的问题,起初没有那么多人关心,但终于突出成为同样重要的问题. Euclid 只是小心地假设,可以按需要延长一条(有限)直线,因而甚至那延长后的直线也还是有限的. 还有 Euclid 叙述平行公理的特别措辞,说两条直线将在截线的同旁内角之和小于两直角的一侧相交,这是为了避免直接说出两条直线无论怎样延长都不相交的

一种方式. 然而 Euclid 确实含有无限直线存在的思想,因为假若直线都是有限的,则在任何情况下它们也不能按需要任意延长,而且他证明了平行线的存在性.

非 Euclid 几何的历史,开始于努力消除对 Euclid 平行公理的怀疑. 从希腊时代到 1800 年间有两种研究途径. 一种是用更为自明的命题来代替平行公理,另一种是试图从 Euclid 的其他九个公理推导出平行公理来. 如果办到这一点,平行公理将成为定理,它也就无可怀疑了. 我们将不给出这方面工作的细节,因为有关历史是容易查到的①.

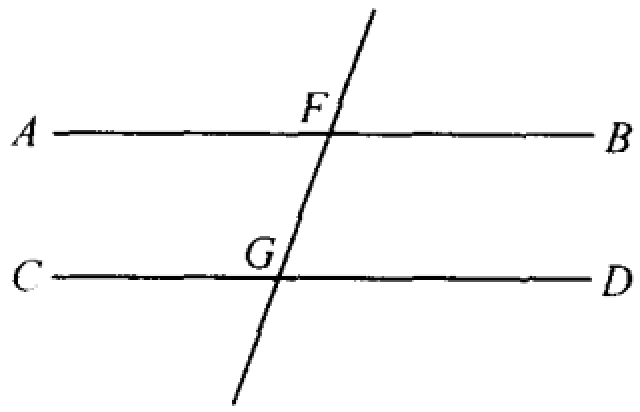


图 36.1

第一个较大的尝试是 Ptolemy 在平行公设论文中给出的. 他试图从 Euclid 的其他九个公理以及与平行公理无关的 Euclid 定理 1 到 28,来证明平行公理. 但 Ptolemy 不自觉地假设了两直线不能包围整个空间,并且假定若 AB 和 CD 平行(图 36.1),则对 FG 一侧内角成立的东西也必在另一侧同样成立.

5 世纪的评论家 Proclus 非常明显地反对平行公理. 他说:"这个公理完全应从全部公理中剔除出去;因为它是一个包含许多困难的定理,Ptolemy 在一本书中致力于解决它,证明需要一些定义和一些定理. 它的逆定理确实由 Euclid 自己作为一个定理证明了."Proclus 指出,我们诚然必须相信当截线一侧的内角之和小于二直角时,两直线必在这侧逐渐相接近,但这两直线确实在有限点处相交还不是很清楚的. 这个结论只是容或可能. 他继续说,因为有一些曲线彼此逐渐接近但并不确实相交. 例如双曲线逐渐接近它的渐近线但不相交,那么 Euclid 公理的两直线难道不会出现这种情况吗? 他于是说截线一侧两内角到达一定的和数,两直线可

① 例如,参看本章末文献中有关 Bonala 的书.

能一定相交,然而对于稍大一点儿而仍小于两直角的数值,两直线可能是渐近线.

Proclus 他自己的平行公设证明,是基于 Aristotle 用于证明宇宙有限的公理.公理说:"如果从两直线成角的点出发无限延伸,则两直线间的相继距离[彼此向另一直线所作垂线]将最后超过任何有限的量."Proclus 的证明基本上是正确的,只是他把一个有问题的公理用另外一个来代替罢了.

Nasîr-Eddîn(1201—1274),Euclid 几何的波斯文编者,也同样给了一个 Euclid 平行公设的"证明",假定两条不平行直线在一个方向相互接近,在另一个方向相互远离.具体说,若 AB 与 CD(图 36.2)是两直线被 GH, JK, LM, … 所截,如果它们与 AB 垂直,且若角 1, 3, 5, … 是钝角而 2, 4, 6, … 是锐角,则 $GH > JK > LM \cdots$. Nasîr-Eddîn 说,这个事实是显而易见的.

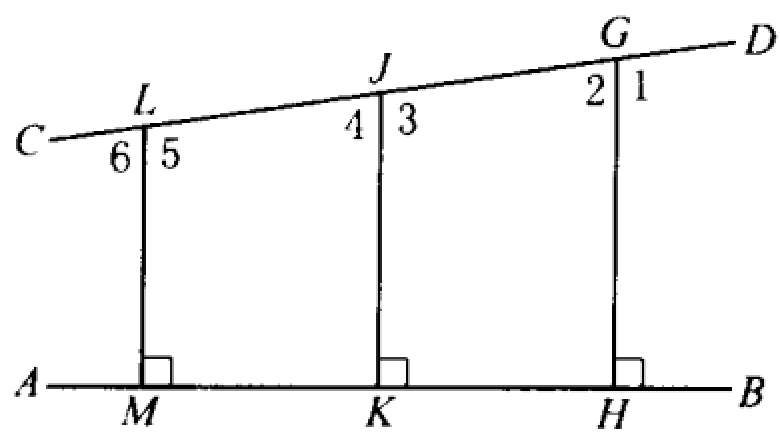


图 36.2

Wallis 在 1663 年也作了一些关于平行公理工作,于 1693 年发表①.首先他重新发表了 Nasîr-Eddîn 关于平行公理的工作,这是牛津的一个阿拉伯语教授为他翻译的.顺便说一句,这是 Nasîr-Eddîn 的平行公理工作为什么为欧洲所知道的原因所在. Wallis 于是评论了 Nasîr-Eddîn 的证明,并提出他自己对 Euclid 命题的证明.他的证明根据一个明显假设,假设对于任意一个三角形,存在一个三角形与原三角形相似,两三角形的边长之比等于任何已给值. Wallis 相信这个公理比起任意小的划分和任意大的扩充都要明显得多.他说,实际上以已给圆心和半径可作一圆的 Euclid 公理,就是先假定有如我们意愿的任意大半径.于是恰好同样对直

---

① *Opera*, 2,669～678.

线形(如对一个三角形)可作类似的假设.

最简单的代替公理是在 1769 年由 Joseph Fenn 提出的,即两相交直线不能同时平行于第三条直线.这个公理也出现在 Proclus 对 Euclid《几何原本》第一卷命题 31 的注释中.Fenn 的命题完全对等于在 1795 年 John Playfair(1748—1819)给出的公理:通过不在直线 l 上的一给定点 P,在 P 与 l 的平面上,只有一条直线不与 l 相交.这是近代书中引用的公理(为了简便常说有“一条且只有一条直线……”).

Legendre 在大约 20 年的时间内搞过平行公设问题.他的结果出现于一些书和一些文章中,包括《几何原理》(*Eléments de géométre*)[①]的各次版本.在研究这问题的一项工作中,在存在不同大小的相似三角形这一假设下,他证明了平行公设;实际上他的证明是解析的,但他假设长度的单位无关系.于是他给出了一个证明,以如下假设为依据,即假设任意给定三个不共线的点,存在一个圆通过这三个点.他又在另一方法中,除去平行公设外用了其他所有公设,证明了三角形的内角之和不能大于两个直角.他于是指出在同样假设下,面积与亏值成正比,亏值是两直角减去三内角之和.所以他试作一三角形两倍于已给三角形的大小,使得大三角形的亏值,将两倍于已给三角形的亏值.用这种方法进行,他希望得到亏值愈来愈大的一些三角形,那么内角之和要趋于零.他想这个结果必然荒谬,于是内角之和必然是 180°.这个事实从而就蕴涵着 Euclid 的平行公理.但是 Legendre 发现这套办法中最后需要证明:通过小于 60°的角内任意一点,恒可画一直线与角的两边相交.而这件事不用平行公理是不能证明的.Legendre 翻译的 Euclid《几何原本》第 12 次版本中(第 12 版,1813),每次都有附录,认为已给出了平行公设的证明,但每次都有缺点,因为总是隐含地假设一些不应该假设的东西,或者假设了一个和 Euclid 公理同样有

① 第一版,1794 年.

问题的公理.

Legendre 在他的研究过程中①,应用除去平行公理以外的 Euclid 公理,证明了以下的重要定理:若一个三角形的内角之和是两直角,则每个三角形都是如此.同样,若一个三角形的内角之和小于两直角,则每个三角形都是如此.于是他给出证明,若任何一个三角形的内角之和是两直角,则 Euclid 平行公设成立.关于三角形内角之和的这个工作也是无结果的,因为 Legendre 未能证明(不用平行公理或相当的公理),一个三角形的内角之和不能小于两直角.

上述这些工作,主要是试图寻求更加不证自明的代替公理,以代替 Euclid 的平行公理.许多提出的公理在直观上似乎确实更加不证自明一些.所以它们的创造者认为他们已经达到目标.然而进一步检查看出这些代替公理不是真正更能令人满意的.有些人作的论断,是关于发生在空间无限远之外的事.例如,要求作一圆通过不在一直线上的三点,当这三个点趋于共线时圆越来越大.另一方面,那些并不直接包含"无限远"的代替公理,例如,存在两个相似而不相等的三角形这样的公理,看来是更复杂的假设,并不比 Euclid 的平行公理更好些.

解决平行公理的第二类尝试,探索从其他九条公理推导出 Euclid 的论断.推导可用直接法或间接法. Ptolemy 曾试过直接证明.间接法是假设某些矛盾论断,以代替 Euclid 的命题,并试着从一组新的相继定理里导出矛盾来.例如,因为 Euclid 平行公理相当于这样的公理,即过不在直线 l 上的一点 P 有一条且仅有一条直线平行于 l,所以对此公理有两样选择.一种是过 P 没有与 l 平行的直线,另一种是过 P 有多于一条直线与 l 平行.若取这两种选择的每一种以代替"一条平行线"公理,而可以证明新的一组将导致矛盾,那么这些选择就都必须排除,而"一条平行线"的论断即被

① *Mém. de l'Acad. des Sci., Paris*, 12,1833,367~410.

证明.

这方面最重要的努力是 Gerolamo Saccheri(1667—1733)进行的,他是一个耶稣会教士和帕维亚(Pavia)大学教授,他仔细研究了 Nasîr-Eddîn 与 Wallis 的工作,然后采用他自己的进行方法. Saccheri 从一个四边形 $ABCD$ 开始(图 36.3),其中 A 和 B 是直角,且 $AC = BD$. 容易证明 $\angle C = \angle D$. 现在 Euclid 平行公理便相当于角 C 与 D 是直角这个论断,于是 Saccheri 考虑两种可能选择:

(1) 钝角假设:$\angle C$ 和 $\angle D$ 是钝角;

(2) 锐角假设:$\angle C$ 和 $\angle D$ 是锐角.

在第一个假设的基础上(并用其他九条 Euclid 公理),Saccheri 证明角 C 和 D 必须是直角. 这样,在此假设下他导出了矛盾.

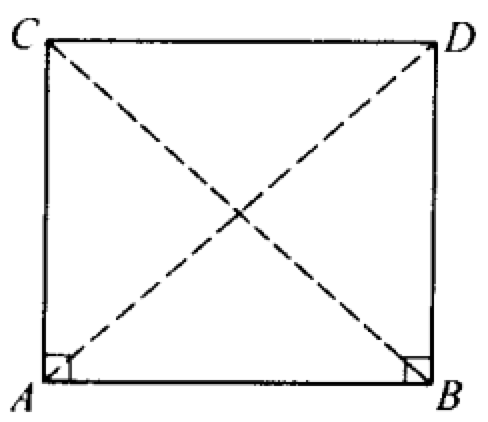


图 36.3

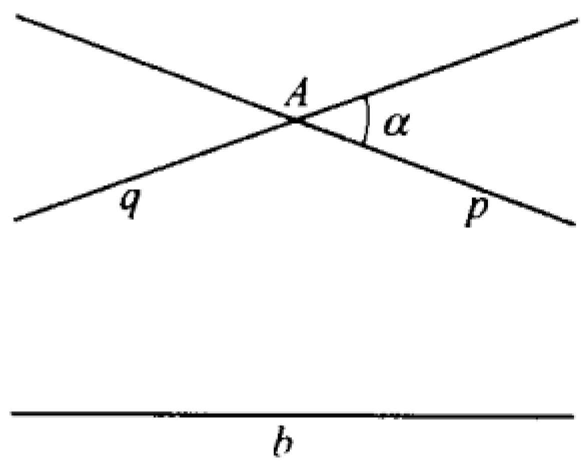


图 36.4

Saccheri 其次考虑了第二个假设并证明了许多有趣的定理. 他继续进行直到得出以下的定理:已给任一点 A 与一直线 b(图 36.4),在锐角假设下,在过 A 的直线束(族)中,有两直线 p 与 q,把直线束分成两部分. 第一部分包含与 b 相交的那些直线,第二部分包含的那些直线(在 α 角里面)将在直线 b 上某处和 b 有共同垂线. 直线 p 与 q 本身都渐近于 b. 从这个结果出发,经过冗长的一系列论证,Saccheri 推导出 p 与 b 在无穷远的公共点处必将有一公垂线. 虽则他没有得到任何矛盾,Saccheri 却发现这个结论与其他结论是太不合情理了,于是他判定锐角假设必然是不真

实的.

这就只剩下图 36.3 中的角 C 与 D 是直角的假设了. Saccheri 以前曾证明过,当 C 与 D 是直角时,任一三角形的内角之和都等于 180°,并证明这个事实蕴涵着 Euclid 平行公理. 所以他感到有理由断言 Euclid 的结论成立,因而他出版了他的书《Euclid 无懈可击》(*Euclides ab Omni Naevo Vindicatus*, 1733). 然而因为 Saccheri 没有从锐角假设中得出矛盾,平行公理问题仍然没有结束.

寻求另一个可接受的公理以替代 Euclid 公理,或者证明 Euclid 断言必然是一个定理,作这种工作的人是如此之多,又是如此徒劳无功,使得 1759 年 d'Alembert 把平行公理问题称之为"几何原理中的家丑".

4. 非 Euclid 几何的先兆

赫尔姆施泰特(Helmstädt)大学数学教授 Georg S. Klügel (1739—1812),他知道 Saccheri 的书,在他 1763 年的论文中,提出了引人注意的意见:人们接受 Euclid 平行公理的正确性是基于经验. 这个意见首次引进的思想是:公理的实质在于符合经验而并非其不证自明. Klügel 对 Euclid 平行公理能够证明表示怀疑. 他认识到 Saccheri 没有得出矛盾,但只是得到似乎异于经验的结果.

Klügel 的论文给 Lambert 提示了平行公理的研究. Lambert 的《平行线论》(*Theorie der Parallellinien*)一书写于 1766 年,出版于 1786 年①,他有点儿像 Saccheri,考虑一个四边形,它的三个角是直角,并研究第四个角是直角、钝角和锐角的可能性. Lambert 放弃了钝角的假设,因为它导致矛盾. 然而,不像 Saccheri, Lambert 没有做出锐角假设得到矛盾的结论.

---

① *Magazin für reine und angewandte Mathematik*, 1786, 137~164, 325~358.

Lambert 从钝角和锐角假设分别推出的结论,即便前者确实导出矛盾,仍是有价值的.他的最显著的结果是在任何一个假设之下,n 边形的面积,正比于其内角之和与 $2n-4$ 个直角的差.(Saccheri 对三角形已有此结果.)他也注意到钝角假设给出的定理,恰好和球面上图形成立的定理一样.并且他猜想锐角假设得出的定理可以应用于虚半径球面上的图形.这就引导他写成了一篇虚角三角函数的论文[①],虚角即 iA,A 是实数且 $i=\sqrt{-1}$.这实际上引出了双曲函数(第 19 章第 2 节).以后我们将更加清楚地看到 Lambert 的意见意味着什么.

Lambert 的几何观点是十分先进的.他认识到任何一组假设如果不导致矛盾的话,一定提供一种可能的几何.这种几何是一种真的逻辑结构,虽然它或许对真实的图形作用很少,后者或可提示一种特别的几何,但不能限制逻辑上可能发展的千差万别的几何.Lambert 还没有达到 Gauss 稍后一些时候引出的更本质的结论.

Ferdinand Karl Schweikart(1780—1859),一个法学教授,业余研究数学,更迈进了一步.他研究非 Euclid 几何,正当 Gauss 努力思考这个课题,但 Schweikart 独立得出他的结论.然而他是受 Saccheri 和 Lambert 工作的影响的.1816 年他写了一份备忘录,于 1818 年送交 Gauss 征求意见,其中 Schweikart 确实区分了两类几何:Euclid 几何与假设三角形三内角之和不是两直角的几何.这后一种几何他称为星空几何,因为它可能在星空内成立.它的定理都是 Saccheri 和 Lambert 根据锐角假设建立的定理.

Franz Adolf Taurinus(1794—1874),Schweikart 的外甥,继续其舅父的建议研究星空几何.虽然在他的 *Geometriae Prima Elementa*(1826)一书中证实了一些新结果,特别是一些解析几何

---

① *Hist. de l'Acad. de Berlin*, 24,1768,324~354, 1770 年出版 = *Opera Mathematica*, 2,245~269.

方面的结果,但他结论说,只有 Euclid 几何对物质空间是正确的,而星空几何只是逻辑上相容. Taurinus 也证明了,虚半径球面上成立的公式,恰好就是星空几何中所成立的.

Lambert,Schweikart 与 Taurinus 的工作在数学上所得的进展是理应扼要介绍的. 此三人及其他如 Klügel, Abraham G. Kästner(1719—1800)(格丁根教授),都承认 Euclid 平行公理不能证明,亦即和其他公理不相依赖. 再者 Lambert,Schweikart 和 Taurinus 相信,可能选取与 Euclid 平行公理相矛盾的另外公理以建立逻辑上相容的几何. Lambert 未能作出这种几何应用的可能性的论断; Taurinus 认为它不能应用于物质空间; 但是 Schweikart 相信它可能应用于星际空间. 此三人也都注意到实球面上的几何具有以钝角假设为基础的几何性质(若不顾后一几何所导致的矛盾性),而虚半径球面上的几何则具有以锐角假设为基础的几何性质. 这样,所有三人都认识到了非 Euclid 几何的存在性,但他们都失去一个基本点,即 Euclid 几何不是唯一的几何,在经验能够证实的范围内,来描述物质空间的性质的.

5. 非 Euclid 几何的诞生

任何较大的数学分支甚或较大的特殊成果,都不会只是个人的工作. 充其量,某些决定性步骤或证明可以归功于个人. 这种数学积累的发展特别适用于非 Euclid 几何. 如果非 Euclid 几何的诞生是指人们认识到除了 Euclid 几何之外还可以有他种几何的话,那么它的诞生应归功于 Klügel 与 Lambert. 如果非 Euclid 几何意味着,一系列包括异于 Euclid 平行公理的公理系统推论的技术性推导,那么最大的功绩必须归于 Saccheri,即便是他也利用了很多人寻求更易于接受的代换 Euclid 公理上的工作. 然而有关非 Euclid 几何最大的事实是它可以描述物质空间,像 Euclid 几何一样

地正确. 后者不是物质空间所必然有的几何;它的物质真理不能以先验理由来保证. 这种认识,不需要任何技术性的数学推导(因已有人做过),首先是由 Gauss 获得的.

Carl Friedrich Gauss(1777—1855)是德国不伦瑞克(Brunswick)城的一个瓦工之子,似乎注定要从事体力劳动. 但是他受初等教育的学校校长为 Gauss 的才能所感动,让他得到 Karl Wilhelm 公爵的照顾. 公爵送 Gauss 进一个中学,后在 1795 年到格丁根大学. 这时 Gauss 按照他的理想开始勤奋学习. 18 岁时他发明最小二乘法,在 19 岁时证明正 17 边形可以作图,这些成就使他相信应该从语言学转向数学. 1798 年他转到赫尔姆施泰特大学,在那里被 Johann Friedrich Pfaff 所注意,Pfaff 成为他的老师和朋友. 完成博士学位后,Gauss 回到不伦瑞克,在那里他写了他最有名的一些论文. 这个工作使他于 1807 年得到格丁根天文学教授和天文台台长职位. 除去一次到柏林参加科学会议外,其余一生都是住在格丁根. 据说他不喜欢教书,然而他爱好社交生活,结过两次婚,养活一家人.

Gauss 第一个较大的工作是他的博士论文,证明了代数基本定理,1801 年他出版了经典的《算术研究》(*Disquisitiones Arithmeticae*). 他在微分几何方面的数学工作(《曲面的一般研究》,1827)是他对勘测、大地测量、绘制地图等感兴趣时的附带结果,是一个数学里程碑(第 37 章第 2 节). 他对代数学、复变函数以及位势理论作出了许多贡献. 在未发表的论文中他所纪录的创作研究分两大类:椭圆函数与非 Euclid 几何.

他对物理学的兴趣也是同样广泛,他为之花费大部分精力. 当 Giuseppe Piazzi(1746—1826)在 1801 年发现小行星谷神星(Ceres)时,Gauss 便进行确定它的轨道. 这是他对天文学研究的开始,这种活动十分吸引他,他致力于此约 20 年. 在这领域内的伟大著作之一是《天体运动理论》(*Theoria Motus Corporum Coelestium*,

1809). Gauss 还对理论磁学与实验磁学的研究获得很大的荣誉. Maxwell 在他的《电学与磁学》一书中说,Gauss 的磁学研究改造了整个科学,改造了使用的仪器,观察方法以及结果的计算. Gauss 关于地磁的论文是物理研究的模范,并提供了地球磁场测量的最好方法. 他对天文学和磁学的研究,开辟了数学与物理相结合的新的光辉的时代.

虽然 Gauss 和 Wilhelm Weber(1804—1891)并没有发明电报的想法,但他们在 1833 年用一个实际装置改进了早期技术,这个装置按照电流通过电线的方向,使得一根针向左或向右转动. Gauss 还研究光学,这在 Euler 时代以后已被忽视了,他在 1838—1841 年的研究为处理光学问题提供了一个完全新的基础.

由于 Gauss 同时代人已开始局限于专门问题的研究,所以 Gauss 研究活动的广泛性更加显得非凡了. 尽管公认 Gauss 至少是 Newton 以后的最大数学家,但与其说他是一个革新者,倒不如说,他是从 18 世纪到 19 世纪的过渡人物. 虽然他得出一些新观点,的确吸引其他数学家们,而他之面向过去更甚于面向未来. Felix Klein 用以下语言描绘了 Gauss 的地位:我们会得出一个数学发展的场面,如果我们把 18 世纪的数学家想象为一系列的高山峻岭,那么最后一个使人肃然起敬的峰巅便是 Gauss——那样一个广大的丰富的区域充满了生命的新元素. Gauss 同代人欣赏他的天才,在他 1855 年去世的时候,受到广泛的尊重,称他为"数学家之王".

Gauss 的工作发表得相对地少,因为他不管做什么工作都要琢磨修饰,既要求达到完美,又要求他的证明达到最大限度的简明而不失严密性,至少是当时的严密性. 至于非 Euclid 几何,他没有发表过权威性的著作. 他在 1829 年 1 月 27 日给 Bessel 的信上说,他永远不愿发表这方面的研究成果,因为怕受人耻笑,或者如他写的,他怕 Boeoti 人的嚷嚷,这是借喻希腊的愚笨部落来影射反对

他的人. Gauss 也许过分小心,但人们应记得,虽然一些数学家逐渐到达非 Euclid 研究的顶峰,但大部分知识界还被 Kant 的教条所统治. 我们所知道的 Gauss 在非 Euclid 几何上的工作,是从他给朋友们的信中透露出来的,1816 与 1822 年《格丁根学报》上的两篇短评和 1831 年的一些注记都是在他去世后遗稿中发现的①.

Gauss 完全知道要证明 Euclid 平行公理的努力是白费的,因为在格丁根这已是常识,而且这些工作的全部历史,Gauss 的老师 Kästner 是完全知道的. Gauss 曾告诉他的朋友 Schumacher 说,早在 1792 年(Gauss 当时 15 岁)他就已经掌握能够存在一种逻辑几何的思想,在其中 Euclid 几何平行公理不成立. 1794 年 Gauss 已发现,在他的非 Euclid 几何的概念中四边形的面积正比于 360°与四内角和的差. 虽然如此,稍后时间甚至到 1799 年 Gauss 仍然试图从其他更可信的假设之中推导 Euclid 平行公理,他仍认为 Euclid 几何是物质空间的几何. 然而在 1799 年 12 月 17 日 Gauss 写信给他的朋友匈牙利数学家 Wolfgang Farkas Bolyai(1775—1856)说:

> 至于说到我,我在我的工作中已取得一些进展. 然而,我选择的道路决不能导致我们寻求的目标[平行公理的推导],而你让我确信你已达到. 这似乎反而迫使我怀疑几何本身的真理性. 诚然,我所得到的许多东西,在大多数人看来都可以认为是一种证明;而在我眼中它却什么也没有证明. 例如,如果我们能够证明可以存在一个直线三角形,它的面积大于任何给定面积的话,那么我就立即能绝对严密地证明全部[Euclid]几何.
>
> 大多数人肯定会把这个当作公理;但是我,不! 实际上,三角形的三个顶点无论取多么远,它的面积可能永远小于一定的极限.

---

① *Werke*, 8,157~268,包含以上所说的与下面讨论的书信.

这段话证明 1799 年 Gauss 有些相信平行公理不能从其余的 Euclid 公理推出来,他开始更认真地从事于开发一个新的又能应用的几何.

从 1813 年起 Gauss 发展他的新几何,最初称之为反 Euclid 几何(anti-Euclidean geometry),后称星空几何,最后称非 Euclid 几何.他深信它在逻辑上是相容的,且有些确信它是能够应用的.在 1816 与 1822 年的评论中和 1829 年给 Bessel 的信中,Gauss 再确认平行公理是不能在 Euclid 其他公理基础上证明的.1817 年他给 Olbers 的信①是一个里程碑.他在信中说,"我越来越深信我们不能证明我们的[Euclid]几何具有[物理的]必然性,至少不能用人类理智,也不能给予人类理智以这种证明.或许在另一个世界中我们可能得以洞察空间的性质,而现在这是不能达到的.直到那时我们决不能把几何与算术相提并论,因为算术是纯粹先验的,但可把几何与力学相提并论."

为检验 Euclid 几何和他的非 Euclid 几何的应用可能性,Gauss 实际测量了由 Brocken,Hohehagen 和 Inselsberg 三个山峰构成的三角形的内角之和,三角形三边为 69,85 与 197 公里.他发现②内角和比 180°超出 14″.85.这个实验无所证明,因为实验误差远大于超出值,所以正确的和可能是 180°或甚至更小些.如 Gauss 所认识到的,这个三角形还小,又因在非 Euclid 几何中,亏值与面积成正比,只有在大的三角形中才有可能显示出 180°与三角和有任何差距.

我们不讨论属于 Gauss 的非 Euclid 几何的个别定理,他没有写出过完整的推导,而他所证明的定理很像在 Lobatchevsky 和 Bolyai 工作中所出现的那样.这两个人一般认为是非 Euclid 几何的创建者.究竟什么是他们的功绩将在后面讨论,但他们确实在演

① *Werke*, 8,177.

② *Werke*, 4,258.

绎的综合基础上发表了有组织的文章,并充分理解这个新几何在逻辑上也如同Euclid几何一样合法.

Nikolai Ivanovich Lobatchevsky(1793—1856),俄国人,在喀山(Kazan)大学学习并从1827到1846年任该校教授和校长.1826年于大学的数学物理系在一篇论文中提出了几何基础的观点.然而论文从未出版并已遗失.他在一系列论文中给出了他对非Euclid几何的研究,文章中的头两篇发表于喀山的杂志,第三篇发表于《数学杂志》①.第一篇题为《论几何基础》,发表于1829—1830.第二篇题为《具有平行的完全理论的几何新基础》(1835—1837),是Lobatchevsky思想的较好表达作品,他叫他的新几何为虚几何,理由或许已经显然,而以后将更清楚.1840年他用德文出版了《平行理论的几何研究》(*Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*)②.在该书中他慨叹人们对他的著作兴趣微弱.虽然他已失明,他却以口授写出一部他的几何的完全新的说明,并于1855年以书名《泛几何》(*Pangéométrie*)出版.

John (János) Bolyai(1802—1860),Wolfgang Bolyai之子,系匈牙利军官.关于非Euclid几何,他称之为绝对几何,写了一篇26页的论文《绝对空间的科学》③.本文出版时作为附录附于其父的书《为好学青年的数学原理论著》(*Tentamen Juventuten Studiosam in Elementa Matheseos*).虽然这部包含两卷的书出版于1832—1833年因而在Lobatchevsky的书出版以后,但Bolyai似乎在1825年已建立起非Euclid几何的思想,并且在那时已相信新几何不是自相矛盾的.在1823年11月23日给他父亲的信中,John写道,"我已得到如此奇异的发现,使我自己也为之惊讶不

---

① *Jour. für Math.*, 17,1837,295~320.

② 英文翻译见于Bonola.参看本章末文献目录.

③ 英文翻译见于Bonola.参看本章末文献目录.

止."Bolyai 的研究工作和 Lobatchevsky 的十分相像,当 Bolyai 第一次看到后者 1835 年的工作时,他认为那是抄袭他自己 1832—1833 出版的书. 另外,Gauss 读了 John Bolyai 的文章后,写信给 Wolgang① 说,他不能称赞那篇文章,因为如此做将是称赞他自己的工作.

6. 非 Euclid 几何的技术性内容

Gauss, Lobatchevsky 和 Bolyai 都认识到 Euclid 平行公理不能在其他九条公理基础上证明,也认识到附加平行公理是建立 Euclid 几何所必需的. 因为平行公理是独立的事实,于是至少从逻辑上讲有可能采取一个与此相矛盾的命题并从新的一组公理来推导出结论.

要研究这三人创建的专门内容,最好取 Lobatchevsky 的工作,因为三人所做的都一样. 众所周知,Lobatchevsky 发表了几次文章,只是在细节上有所不同,这里将用他 1835—1837 年的文章作为叙述的基础.

因和 Euclid 的《原本》一样,很多定理的证明可以不依赖于平行公理,这些定理在新几何中也是正确的. Lobatchevsky 在文章前六章中专致力于基本定理的证明,开始他假定空间是无限的. 于是他能证明两直线相交不能多于一个点,同一直线的两垂线不相交.

第七章中 Lobatchevsky 果敢地放弃 Euclid 平行公理,作出下面的假设:给出一条直线 AB 与一点 C(图 36. 5),通过点 C 的所有直线关于直线 AB 而言可分成两类,一类直线与 AB 相交,另一类不相交. p 与 q 属于后一类,构成两类间的边界. 这两条边界线称为平行直线. 更确切地说,若 C 是与直线 AB 的垂直距离为 a 的

---

① *Werke*, 8,220~221.

一点，于是存在一个角① $\pi(a)$，使得所有过 C 的直线与 CD 所成的角小于 $\pi(a)$的将与 AB 相交；其他过 C 的直线不与 AB 相交②. 与 AB 成角 $\pi(a)$的两直线是平行线，$\pi(a)$称为平行角. 除平行线外，过 C 而不与 AB 相交的直线称为不相交直线，虽然在 Euclid 意义下，它们是与 AB 平行的，所以从这个意义上讲，在 Lobatchevsky 几何里，过 C 有无穷多条平行线.

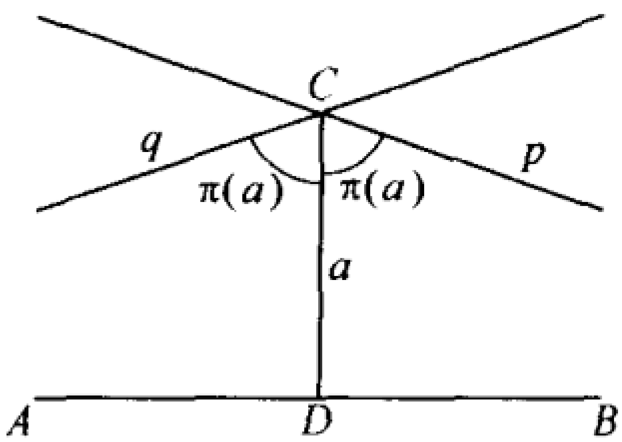


图 36.5

当 $\pi(a)=\pi/2$，则得出 Euclid 平行公理. 若 $\pi(a)\neq\pi/2$，则当 a 减小到 0 时，$\pi(a)$增加且趋于 $\pi/2$，而当 a 变成无限大时，$\pi(a)$将减小而趋于零. 三角形的内角之和恒小于 π，且随着三角形面积的增大而减小，当面积趋于零时，它就趋于 π. 若两三角形相似，则它们全等.

Lobatchevsky 现在转向他几何的三角学部分，第一步是确定 $\pi(a)$. 若全中心角为 2π，结果是③

$$\tan\frac{\pi(x)}{2}=e^{-x}, \tag{1}$$

由此得出 $\pi(0)=\pi/2$ 及 $\pi(+\infty)=0$. 关系式(1)的重要之点在于，对每个长度 x 关联着一个定角 $\pi(x)$. 当 $x=1$ 时，

$$\tan[\pi(1)/2]=e^{-1},$$

所以 $\pi(1)=40°24'$. 这样，单位长度是平行角为 $40°24'$的长度. 这

---

① 记号 $\pi(a)$是标准的，所以用于此，实际上 $\pi(a)$中的 π 与数 π 无关.

② 与长度关联的特定角概念来自 Lambert.

③ 这是特殊公式；Lobatchevsky 在 1840 年工作中给出的就是近代教科书中通常给出的形式，Gauss 也有这形式，即

$$\tan\frac{1}{2}\pi(x)=e^{-x/k}, \tag{a}$$

其中 k 是一常数，叫做空间常数. 对于理论目的，k 的值是无关重要的. Bolyai 也给出过(a)式.

个单位长度没有直接的物理意义,物理上可以是一英寸或是一英里. 人可以选择物理解释,使得几何能有物理的应用①.

Lobatchevsky 于是导出他几何中平面三角形边与角的公式. 在 1834 年一篇论文中,他定义了实数 x 的 $\cos x$ 与 $\sin x$ 作为 e^{ix} 的实部与虚部. Lobatchevsky 的观点是要纯分析地给出三角学,以使它完全独立于 Euclid 几何. 他的几何中主要三角公式是(图 36.6)

$$\cot\pi(a) = \cot\pi(c)\sin A,$$
$$\sin A = \cos B\sin\pi(b),$$
$$\sin\pi(c) = \sin\pi(a)\sin\pi(b).$$

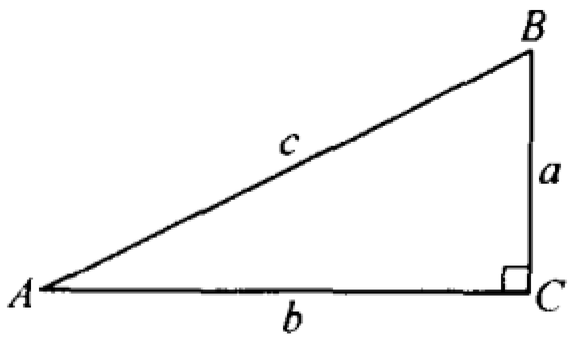


图 36.6

假若边长是虚数,这些公式在普通球面三角中成立. 就是说,若在球面三角的普通公式中,用 ia, ib 与 ic 以代替 a, b, c 即得到 Lobatchevsky 的公式. 因为虚角的三角公式能以双曲函数代替,人们会料到在 Lobatchevsky 公式中能看到双曲函数. 应用关系式 $\tan[\pi(x)/2] = e^{-x/k}$ 即可引进它们. 上面第一个公式将变成

$$\sinh\frac{a}{k} = \sinh\frac{c}{k}\sin A.$$

在普通球面三角中,三个角为 A, B, C 的三角形面积是 $r^2(A+B+C-\pi)$,而在非 Euclid 几何中这面积是 $r^2[\pi-(A+B+C)]$,它相当于在普通公式中用 ir 代替 r.

根据对无穷小三角形的研究,Lobatchevsky 在第一篇文章(1829—1830)中导出了公式

$$ds = \sqrt{(dy)^2 + \frac{(dx)^2}{\sin^2\pi(x)}},$$

① 就关系 $\tan[\pi(x)/2] = e^{-x/k}$ 来说,选择 x 值,比如说对应于 40°24′的 x 值,就能确定 k.

作为曲线 $y=f(x)$ 上在点(x, y)处的弧微分. 于是可算出半径为 r 的圆周长为

$$C=\pi(e^{r}-e^{-r}).$$

并证明圆面积表达式为

$$A=\pi(e^{r/2}-e^{-r/2})^{2}.$$

他也给出了有关平面曲线区域的面积与立体体积的一些定理.

当度量很小时可以从非 Euclid 公式得出 Euclid 几何公式. 例如,若用

$$e^{r}=1+r+\frac{r^{2}}{2!}+\cdots,$$

并对小的 r 略去前两项后的其余各项,例如

$$C=\pi(e^{r}-e^{-r})\sim\pi\{1+r-(1-r)\}=2\pi r.$$

在第一篇论文(1829—1830)中 Lobatchevsky 也考虑到他的几何对物质空间应用的可能性. 他论据的要点是基于恒星的视差. 设 E_1 及 E_2(图 36.7)是地球相差 6 个月的位置,S 是一个星,S 的视差 p 是从垂线(比如说)E_1S'测得 E_1S 与 E_2S 方向上的差值. 如果 E_1R 是 E_2S 的 Euclid 平行线,那么因为 E_1SE_2 是等腰三角形,$\pi/2-\angle SE_1E_2$ 是星的方向改变的一半,即 $p/2$. 对于天狼星(Sirius),这个角是 1″.24(Lobatchevsky 的值). 只要这个角不是零,从 E_1 到星的直线就不能平行于 TS,因为这直线交于 TS. 然而,如果对于所有星的不同视差有一个下界的话,则任何过 E_1 的直线,若它与 E_1S'所成的角小于这个下界,都可以作为过 E_1 点平行于 TS 的直线,并且这个几何就恒星的测量而言就会是同样有用

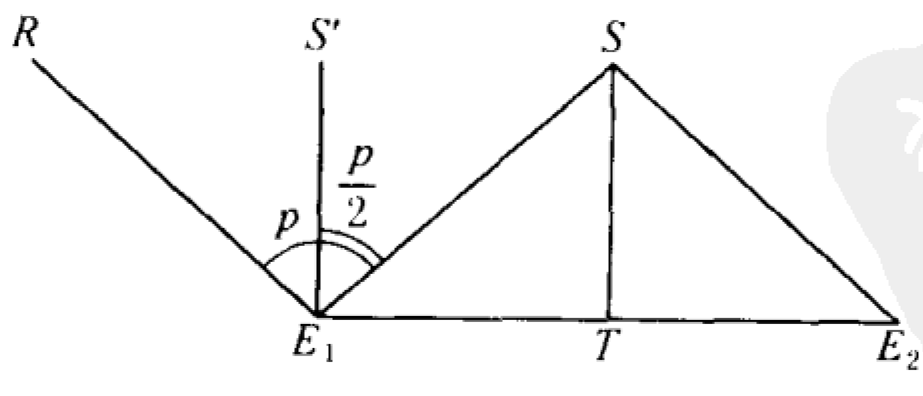


图 36.7

的. 但 Lobatchevsky 随即证明在他的几何中单位长度,在物理意义下,应该比地球半径百万倍的一半还要大. 换言之,Lobatchevsky 的几何只有在十分大的三角形中才可以应用.

7. Lobatchevsky 与 Bolyai 发明先后的争议

非 Euclid 几何的诞生,常用来作为一种思想如何在不同人中间几乎同时独立地发生的例子. 有时人们认为这纯粹是一种偶合,而有时则认为是时代精神在相隔遥远的角落里产生影响的证据. Gauss,Lobatchevsky 和 Bolyai 创建非 Euclid 几何,既不是同时创造的例子,也不能认为把伟大功绩归于 Lobatchevsky 与 Bolyai 是公允的. 已经指出,他们二人首先发表公然自称为非 Euclid 几何的文章是事实,在这举动上他们比 Gauss 表现了更大的勇气. 但是非 Euclid 几何的建立很难说是他们的贡献. 我们已经指出,即便在 Gauss 之前就已有 Lambert,Schweikart 与 Taurinus 是独立的创造者,并且 Lambert 与 Taurinus 发表了他们的工作. 再者新几何能够应用的认识则来自于 Gauss.

Lobatchevsky 与 Bolyai 都从 Gauss 那里得到许多启发. Lobatchevsky 在喀山的教师 Johann Martin Bartels(1769—1836)是 Gauss 的好友. 实际上,从 1805 年到 1807 年间 Gauss 和 Bartels 是在不伦瑞克共同度过的,嗣后还彼此保持通信. Bartels 不把 Gauss 有关非 Euclid 几何的进展告诉 Lobatchevsky(他留在喀山大学,和 Bartels 是同事),那是绝对不可能的,特别是 Bartels 一定知道 Gauss 对 Euclid 几何真理性的怀疑.

就 John Bolyai 说,他的父亲 Wolfgang 也是 Gauss 的一位至友,并且是 1796—1798 年在格丁根的同学. Wolfgang 与 Gauss 不仅彼此继续通信,并且讨论了平行公理的特别课题,如前面引文中指出的. Wolfgang 继续努力研究平行公理问题,并在 1804 年送给

Gauss 一个所谓证明. Gauss 向他指出证明是错误的. 在 1817 年 Gauss 肯定认为,不仅公理不能证明,而且逻辑上相容而物理上又能应用的非 Euclid 几何是能够构造的. 他除了在 1799 年的信上讲了这一点之外,还把他最近的思想坦率地告诉了 Wolfgang. Wolfgang 继续研究这个问题直到他 1832—1833 年的《原理论著》出版. 因为他要他的儿子继续研究他所从事的平行公理的工作,所以几乎可以肯定他会把自己所知道的一切传给他的儿子的.

有相反的观点. 数学家 Friedrich Engel(1861—1941)认为虽说 Lobatchevsky 的教师 Bartels 是 Gauss 的朋友,但 Lobatchevsky 从这方面所获得的知识,不会超过 Gauss 对平行公理在物理上的正确性的怀疑. 但这事实本身是个关键. 然而,Engel 甚至怀疑 Lobatchevsky 会从 Gauss 那里获得这一点知识. 因 Lobatchevsky 从 1816 年起就试图证明 Euclid 平行公理;后来,他在 1826 年创造新几何时,终于认识到这种努力是无希望的. John Bolyai 直到 1820 年间也试图证明 Euclid 平行公理,然后转向构造新几何. 但是继续努力去证明平行公理并不意味着不知道 Gauss 的思想①. 因为无人(Gauss 也没有)曾经证明 Euclid 的平行公理不能从其他九条公理推导出来,Lobatchevsky 和 Bolyai 可能决定尝试解决这个问题. 失败之后,他们就更加能够赞赏 Gauss 对此所持观点的先见之明了.

至于说到 Lobatchevsky 和 John Bolyai 贡献的技术性内容,虽然他们可能是相互独立地并独立于他们的前辈而创立的,但是 Saccheri 和 Lambert 的工作,更不用说 Schweikart 和 Taurinus 的工作,在格丁根是众所周知的,Bartels 和 Wolfgang Bolyai 肯定是知道的. 而当 Lobatchevsky 在他的 1835—1837 年文章中看到

① 然而可参看 George Bruce Halsted, *Amer. Math. Monthly*, 6,1899,166~172 与 7,1900,247~252.

2000 年来在解决平行公理问题上的徒劳无功时,通过推断,他接受了早期工作的知识.

8. 非 Euclid 几何的重要意义

我们已经说过非 Euclid 几何的诞生,是自希腊时代以来数学中一个重大的革新步骤.我们现在不讨论这个课题的全部重要意义.我们将沿着事物的历史发展过程叙述.这个创造的影响和它的意义的全面认识,都被推迟了,因为 Gauss 没有发表他的研究工作,而 Lobatchevsky 和 Bolyai 的工作约有 30 年之久为人所忽视.虽然这三人是知道他们工作的重要性的,但是数学家们一般表现不愿意接受激进的思想,加之 19 世纪 30 年代与 40 年代几何的关键主题是射影几何,因而非 Euclid 几何的研究工作也就不吸引英、法、德等国的数学家们.当 Gauss 关于非 Euclid 几何的通信与注记在 1855 年他去世之后出版时,人们的注意力才引向这个课题.他的名字引起人们对非 Euclid 几何思想的重视,不久 Lobatchevsky 和 Bolyai 的工作被 Richard Baltzer(1818—1887)写进了 1866—1867 年的一本书中.嗣后的发展最终使得数学家们认识到非 Euclid 几何的全部意义.

Gauss 确实看到非 Euclid 几何的最富于变革性的含义.非 Euclid 几何诞生的第一步就在于认识到:平行公理不能在其他九条公理的基础上证明.它是独立的命题,所以可以采取一个与之矛盾的公理并发展成为全新的几何,这是 Gauss 和其他人做的.但是 Gauss 已经认识到 Euclid 几何并非必然是物质空间的几何,亦即并无必然的真理性,把几何和力学相提并论,并断言真理性的品质必须限于算术(及其在分析中的发展).信任算术本身是奇怪的.算术此时根本尚无逻辑基础.确信算术代数与分析对物质世界提供真理性,那完全是根源于对经验的信赖.

非 Euclid 几何的历史以惊人的形式说明数学家受其时代精神(而不是他们所作的推理)影响的程度是多么厉害. Saccheri 曾经拒绝过非 Euclid 几何的奇异定理,并且断定 Euclid 几何是唯一正确的. 但是在 100 年后,Gauss,Lobatchevsky 和 Bolyai 满怀信心地接受了新几何,他们相信他们的几何在逻辑上是相容的,并且相信这个几何和 Euclid 几何一样正确. 但他们没有证明新几何的逻辑相容性. 虽然他们证明过许多定理,而且并未得出显明的矛盾,但是或许能导出矛盾的可能性还是存在的. 如果这一情况发生,他们的平行公理的假设便会不正确,于是正如同 Saccheri 所相信的一样,Euclid 的平行公理将是其他公理的推论.

Bolyai 和 Lobatchevsky 确实考虑到了相容性问题并且部分相信它,因为他们的三角学和虚半径球面上的三角学相同,而球面是 Euclid 几何的一部分. 但 Bolyai 并不满足于这个论据,因为三角学本身并不是完整的数学系统. 于是尽管缺少相容性的任何证明,或者是缺少新几何的可能应用性(这至少可作为使新几何能令人信服的论据),Gauss,Bolyai 和 Lobatchevsky 接受了前人认为荒谬的东西. 这种接受是一个信仰行动. 非 Euclid 几何相容性的问题在其后 40 年仍然悬而未决.

有关非 Euclid 几何的创建还有一点值得注意与强调. 有一种普遍信念认为 Gauss,Bolyai 和 Lobatchevsky 是钻了牛角尖,只是为了满足理智上的好奇心而玩弄改变平行公理的游戏,所以创建了新几何. 但是因为这个创造已证明对科学异常重要——我们将要讨论的非 Euclid 几何的一种形式已经用于相对论——许多数学家争论说,只凭纯粹理智上的好奇心,就可以作为探索任何数学思想的充分理由,并且那种探索也几乎同样肯定地会像非 Euclid 几何那样对科学产生价值. 但是非 Euclid 几何的历史并不支持这种论点. 我们已经看到非 Euclid 几何的发生是在研究平行公理的几个世纪以后. 对于这个公理的考虑是基于这样的事实,即它

作为一个公理,应该是不证自明的真理,因为几何公理是我们关于物质空间的基本事实而且数学的和物理学的广大分支都使用 Euclid 几何的性质,数学家都想确知它们依赖于真理. 换言之,平行公理的问题不仅是真正的物理问题,而且是所能有的基本的物理问题.

参 考 书 目

Bonola, Roberto: *Non-Euclidean Geometry*, Dover (reprint), 1955.

Dunnington, G. W.: *Carl Friedrich Gauss*, Stechert-Hafner, 1960.

Engel, F., and P. Staeckel: *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss*, 2 vols. B. G. Teubner, 1895.

Engel, F., and P. Staeckel: *Urkunden zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie*, B. G. Teubner, 1899～1913, 2 vols. The first volume contains the translation from Russian into German of Lobatchevsky's 1829～1830 and 1835～1837 papers. The second is on the work of the two Bolyais.

Enriques, F.: "Prinzipien der Geometrie", *Encyk. der Math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1907～1910, III AB1, 1～129.

Gauss, Carl F.: *Werke*, B. G. Teubner, 1900 and 1903, Vol. 8, 157～268; Vol. 9, 297～458.

Heath, Thomas L.: *Euclid's Elements*, Dover (reprint), 1956, Vol. 1, pp. 202～220.

Kagan, V.: *Lobatchevsky and his Contribution to Science*, Foreign Language Pub. House, Moscow, 1957.

Lambert, J. H.: *Opera Mathematica*, 2 vols. Orell Fussli, 1946～1948.

Pasch, Moritz, and Max Dehn: *Vorlesungen über neuere Geometrie*, 2nd ed., Julius Springer, 1926, pp. 185～238.

Saccheri, Gerolamo: *Euclides ab Omni Naevo Vindicatus*, English trans. by G. B. Halsted in *Amer. Math. Monthly*, Vols. 1～5, 1894～1898; also *Open Court Pub. Co.*, 1920, and Chelsea (reprint), 1970.

Schmidt, Franz, and Paul Staeckel: *Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauss und Wolfgang Bolyai*, B. G. Teubner, 1899; Georg Olms (reprint), 1970.

Smith, David E.: *A Source Book in Mathematics*, Dover (reprint), 1959, Vol. 2, pp, 351～388.

Sommerville, D. M. Y.: *The Elements of Non-Euclidean Geometry*, Dover (reprint), 1958.

Staeckel, P.: "Gauss als Geometer", *Nachrichten König. Ges. der Wiss. zu Gött.*, 1917, Beiheft, pp. 25～142. Also in Gauss: *Werke*, X_2.

von Walterhausen, W. Sartorius: *Carl Friedrich Gauss*, S. Hirzel, 1856; Springer-Verlag (reprint), 1965.

Zacharias, M.: "Elementargeometrie und elementare nicht-euklidische Geometrie in synthetischer Behandlung", *Encyk. der Math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1914～1931, III AB9, 859～1172.

第 37 章

Gauss 和 Riemann 的微分几何

> 您，自然，是我的女神，我对您的规律的贡献是有限的……
>
> Carl F. Gauss

1. 引　言

现在我们将着手讨论微分几何，特别是由 Euler 奠基并由 Monge 扩展的曲面论的发展线索. 这门学科的下一个重大步骤是由 Gauss 作出的.

Gauss 从 1816 年起就在大地测量和地图绘制方面做了非常大量的工作. 他亲身参加实际的物理测量，在这方面他发表了许多文章，激起了他对微分几何学的兴趣，并导致 1827 年他的决定性文章《关于曲面的一般研究》[①]. 然而，比他这篇关于三维空间中曲面的微分几何的决定性论述所作出的贡献更为重要的是，Gauss 提出了一个完全新的概念，即一张曲面本身就是一个空间. 这个概念嗣后为 Riemann 所推广，从而在非 Euclid 几何学中开辟了新的远景.

2. Gauss 的微分几何

Euler 早就提出了曲面上任一点的坐标 (x, y, z) 可以用两个参数 u 和 v 表示的思想(第 23 章第 7 节)；就是说，曲面的方程可以这样给出：

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v). \tag{1}$$

① *Comm. Soc. Gott.*, 6, 1828, 99 ～ 146 = *Werke*, 4, 217～258.

Gauss 的出发点是运用这个参数表示来做曲面的系统研究. 从这些参数方程中我们有

(2) $dx = a du + a' dv,\ dy = b du + b' dv,\ dz = c du + c' dv.$

其中 $a = x_u$, $a' = x_v$ 等等. 为了方便,Gauss 引进行列式

$$A = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix},\ B = \begin{vmatrix} c & a \\ c' & a' \end{vmatrix},\ C = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

和量

$$\Delta = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2},$$

他假设这个量不恒等于零.

在任何曲面上基本量是弧长元素,这在(x, y, z)坐标中便是

(3) $$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Gauss 用方程(2)把(3)写成

(4) $$ds^2 = E(u, v)du^2 + 2F(u, v)du dv + G(u, v)dv^2,$$

其中

$$E = a^2 + b^2 + c^2,\ F = aa' + bb' + cc',\ G = a'^2 + b'^2 + c'^2.$$

曲面上两条曲线之间的夹角是另一个基本量. 曲面上的一条曲线由 u 和 v 之间的一个关系式确定,因为这样 x, y 和 z 就变成参数 u 或 v 的一个函数,而方程(1)则变成曲线的参数表示. 用微分的语言来说,在一点(u, v),从这点出发的曲线或曲线的方向由比 $du : dv$ 给定. 于是,如果我们有从(u, v)出发的两条曲线或两个方向,一个由 $du : dv$ 给定,另一个由 $du' : dv'$ 给定,并设 θ 是这两个方向之间的夹角,则 Gauss 证明

(5) $$\cos\theta = \frac{E du du' + F(du dv' + du' dv) + G dv dv'}{\sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}\sqrt{E du'^2 + 2F du' dv' + G dv'^2}}.$$

接着 Gauss 着手研究曲面的曲率. 他的曲率的定义,是 Euler 用于空间曲线和 Olinde Rodrigues① 用于曲面的标形对曲面的推广. 在曲面上的每一点(x, y, z)有一个带方向的法线. Gauss 考

---

① *Corresp. sur l'Ecole Poly.*, 3,1814～1816,162～182.

虑一个单位球面,并选定一条半径,它具有曲面上的有向法线的方向.选取的半径确定了球面上的一个点(X, Y, Z).然后,如果我们考虑曲面上围绕(x, y, z)的任一小区域,则在球面上有一个围绕(X, Y, Z)的对应区域.当这两块区域分别收缩到它们的对应点时,把球面上区域的面积与曲面上对应区域的面积之比的极限,定义为曲面在点(x, y, z)的曲率.首先,注意到球面在点(X, Y, Z)处的切平面平行于曲面在点(x, y, z)处的切平面,Gauss 计算了这个比值.由于这种平行性,两个面积之比等于它们分别在各自切平面上的射影之比.为了求得这后一个比值,Gauss 进行了惊人数量的微分,并获得了一个更加基本的结果,这就是曲面的(总)曲率 K 为

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \tag{6}$$

其中

$$L = \begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}, \quad M = \begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}, \tag{7}$$

$$N = \begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}.$$

接着,Gauss 证明他的 K 就是 Euler 早就提出过的在(x, y, z)处的两个主曲率之乘积.作为两个主曲率的平均曲率的概念,是由 Sophie Germain 在 1831 年①提出的.

这时 Gauss 作了一个极其重要的考察.当曲面由参数方程(1)给定时,曲面的性质似乎依赖于函数 x, y, z.通过固定 u,譬如说 $u = 3$,并且让 v 变动,就在曲面上得到一条曲线.对于 u 的其他可能取定的值,得到一族曲线.同样地,固定 v 也得到一族曲线.这两族曲线是曲面上的参数曲线,使得曲面上的每一个点可以

① *Jour. für Math.*, 7, 1831, 1~29.

用一对数，譬如说是(c, d)给定，这里 $u=c$ 和 $v=d$ 是经过这点的参数曲线. 这些坐标不一定比纬度和经度更表示距离. 让我们想象一张曲面，在它上面已经以某种方式确定了参数曲线. 于是 Gauss 断定，曲面的几何性质仅仅由 ds^2 的表达式(4)中的 E, F 和 G 确定. u 和 v 的这些函数正是事情的全部.

从(4)和(5)显然可以看出，曲面上的距离和角度完全由 E, F 和 G 确定. 但是，上面关于曲率的 Gauss 的基本表达式(6)，又依赖于另一些量 L, M 和 N. 这时 Gauss 证明了

$$K=\frac{1}{2H}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{F}{EH}\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{1}{H}\frac{\partial G}{\partial u}\right]+\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{2}{H}\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{1}{H}\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{F}{EH}\frac{\partial E}{\partial u}\right]\right\}, \tag{8}$$

其中 $H=\sqrt{EG-F^2}$，并且等于 Gauss 在上面定义的 Δ. 方程(8)叫做 Gauss 特征方程，它表明曲率 K，以及从(6)来看特别是量 $LN-M^2$，仅仅依赖于 E, F 和 G. 因为 E, F 和 G 仅仅是曲面上参数坐标的函数，所以曲率也仅仅是参数的一个函数，而完全与曲面是否在三维空间中或曲面在三维空间中的形态无关.

Gauss 已经注意到曲面的性质只依赖于 E, F 和 G. 但是除曲率以外的许多性质包含着量 L, M 和 N，并且不是取方程(6)中的组合 $LN-M^2$ 的形式. Gauss 的论点的解析证明由 Gaspare Mainardi(1800—1879)[①]和 Delfino Codazzi(1824—1875)[②]独立地给出，他们两人都以微分方程的形式给出了两个附加关系，这些关系连同 Gauss 的特征方程一起，可以用 E, F 和 G 来限定 L, M 和 N，而 K 则取(6)中的值.

其后，Ossian Bonnet(1819—1892)在 1867 年[③]证明了一个定理：如果六个函数满足 Gauss 特征方程和两个 Mainardi-Codazzi

① *Giornale dell' Istituto Lombardo*, 9, 1856, 385～398.

② *Annali di Mat.*, (3), 2, 1868～1869, 101～119.

③ *Jour. de l'Ecole Poly.*, 25, 1867, 31～151.

方程，则它们除了在空间的位置和定向以外唯一地确定一张曲面. 具体地，如果给定了 u 和 v 的函数 E, F, G 和 L, M, N，它们满足 Gauss 特征方程和 Mainardi-Codazzi 方程，并设 $EG-F^2\neq 0$，则存在一张由 u, v 的三个函数 x, y, z 给定的曲面，其第一基本形式为

$$E\mathrm{d}u^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2,$$

并且 L, M, N 和 E, F, G 有关系式(7). 这个曲面除它在空间的位置外是唯一确定的.（对于具有实坐标(u, v)的实曲面，必定有 $EG-F^2>0$, $E>0$ 和 $G\geqslant 0$.）Bonnet 的定理是和曲线的对应定理(第 23 章第 6 节)相类似的.

曲面的性质仅仅依赖于 E, F 和 G 这一事实有许多含意，其中有一些已经由 Gauss 在他的 1827 年的文章中揭示出来. 例如，如果一张曲面无伸缩地弯曲，则坐标曲线 $u=$ 常数和 $v=$ 常数将保持不变，所以 $\mathrm{d}s$ 也将保持不变. 因此曲面的所有性质，特别是曲率，也将保持不变. 进一步说，如果两张曲面能够彼此建立一一对应，也就是说，如果 $u'=\phi(u, v)$, $v'=\psi(u, v)$，其中 u'和 v'是第二张曲面上的点的坐标，并且如果两张曲面在对应点的距离元素相同，即如果

$$E\mathrm{d}u^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2=E'\mathrm{d}u'^2+2F'\mathrm{d}u'\mathrm{d}v'+G'\mathrm{d}v'^2,$$

其中 E, F, G 是 u 和 v 的函数，E', F', G'是 u'和 v'的函数，则这两张曲面称为**等距的**，它们必然有相同的几何. 特别，正如 Gauss 所指出的，它们在对应点一定有相同的总曲率. 这个结果 Gauss 叫做“极妙的定理”(theorema egregium)，它是一个极其优美的定理.

作为一个推论，由此推出，要能把曲面的一部分移到另一部分上(那意味着保持距离)，一个必要条件是曲面有常曲率. 例如，球面的一部分可以无畸变地移到另一部分上，而在椭球面上就不能这样做.（但是，在等距映射下把一张曲面或曲面的一部分同另一

张曲面或另一部分拟合,是可以发生弯曲的.)如果两张曲面不是常曲率的,虽然在对应点它们的曲率相等,但它们并不一定有等距关系. 1839 年① Ferdinand Minding(1806—1885)证明:如果两张曲面确有相等的常曲率,则可以把一张曲面等距映射到另一张上面.

Gauss 在他 1827 年的文章中研究的另外一个极其重要的题目,是寻找曲面上的测地线.(测地线这一名词是 Liouville 在 1850 年引进的,取自大地测量学.)这个问题需要 Gauss 使用的变分法. 他通过 x, y, z 表示来研究这个问题,并证明 John Bernoulli 提出的一个定理:测地线的主法线垂直于曲面.(例如球面上的纬度圆,在其一点处的主法线位于这个圆所在的平面上,并不与球面垂直,而经度圆在任一点处的主法线都与球面垂直.)u 和 v 之间的任何一个关系都确定曲面上的一条曲线,给定测地线的这种关系由一个微分方程确定. 这个方程可以写成多种形式,Gauss 仅仅指出这是 u 和 v 的一个二阶方程,但是没有明确给出. 有一种形式是

$$(9) \quad \frac{d^2 v}{du^2} = n\left(\frac{dv}{du}\right)^3 + (2m-\nu)\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + (l-2\mu)\frac{dv}{du} - \lambda,$$

这里 n, m, μ, ν, l, λ 是 E, F, G 的函数.

在作曲面上两点之间有唯一测地线存在这一假定时,必须非常小心. 球面上两个邻近的点有唯一的测地线连接它们,但是两个对径点却有无穷多条测地线连接它们. 类似地,在圆柱面的同一条直母线上的两点,被一条沿直母线的测地线所连接,但是还有无穷多条作为测地线的螺旋线连接这两个点. 如果在一区域内的两点之间只有一条测地线弧,则在这区域内这条弧给出两点之间的最短路线. 在特殊曲面上实际确定测地线的问题,有许多人做过研究.

---

① *Jour. für Math.*, 19,1839,370～387.

Gauss 在 1827 年的文章中,对于一个由测地线构成的三角形(图 37.1),证明了一条关于曲率的著名定理.设 K 是一个曲面的可变曲率.于是 $\iint_A K\,\mathrm{d}A$ 是这个曲率在面积 A 上的积分. Gauss 的定理用于这三角形时说的是

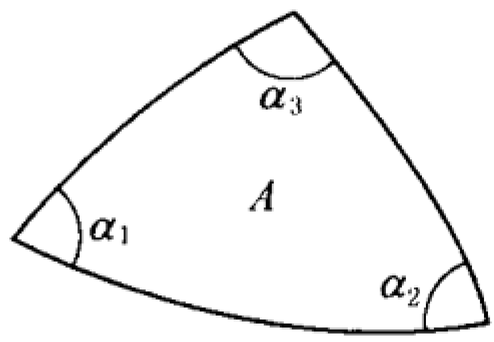


图 37.1

$$\iint_A K\,\mathrm{d}A = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi;$$

这就是说,在一个测地三角形上曲率的积分等于三个角之和超过 180°之盈量,或在三角之和小于 180°时,等于三个角之和不足 180°之亏量. Gauss 说这个定理应该算是一个最精美的定理.这个结果推广了 Lambert(第 36 章第 4 节)的定理,后者断言球面三角形的面积等于它的球面盈量与半径平方之积,因为在一个球面三角形上 K 是常数且等于 $1/R^2$.

在 Gauss 的微分几何中还有一部分更为重要的工作必须提一提. Lagrange(第 23 章第 8 节)曾经论述了旋转面到平面的保角映射. 1822 年, Gauss 以他关于求任一曲面保角变换到任何另一曲面上的解析条件问题的文章①,获得了丹麦皇家科学会的奖金.在两个曲面上对应点的邻域中成立的他的条件,相当于下列事实:设 T 和 U 是表示一个曲面的参数, t 和 u 是表示另一个曲面的参数,则 T 和 U 的一个函数 $P+\mathrm{i}Q$ 是 $p+\mathrm{i}q$ 的一个函数 f,这里 $p+\mathrm{i}q$ 是参数 t 和 u 的对应的函数,并且 $P-\mathrm{i}Q$ 是 $f'(p-\mathrm{i}q)$,其中 f' 或者就是 f,或者是由 f 把其中的 i 换成 −i 所得到的函数.关于函数 $P+\mathrm{i}Q$,我们将不作进一步的说明.这个函数 f 依赖于两个曲面之间的对应关系,这个对应关系是用 $T=T(t,u)$ 和 $U(t,u)$ 规定的.关于曲面的一个**有限部分**是否可能以及用什么方式保角

---

① *Werke*, 4, 189～216.

映射到另一个曲面上的问题，Gauss并没有回答. 这个问题，Riemann在他关于复值函数的工作中继续作了研究(第27章第10节).

Gauss在微分几何方面的工作本身就是一个里程碑. 但是，它的含义比他自己的评价要深刻得多. 在这个工作之前，曲面一直是被作为三维Euclid空间中的图形进行研究的. 但是Gauss证明了，曲面的几何可以集中在曲面本身上进行研究. 如果通过曲面在三维空间中的参数表示

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v)$$

引进u和v坐标，并用以确定E, F和G，就得到这个曲面的Euclid性质. 然而，在曲面上给定这些u和v坐标，以及以u和v的函数E, F和G表示的ds^2的表达式之后，曲面的所有性质就都能从这个表达式推导出来. 这就提出两个极其重要的思想. 第一个是，曲面本身可以看成是一个空间，因为它的全部性质被ds^2确定. 人们可以忘掉曲面是位于一个三维空间中的这个事实. 假如把曲面本身看成是一个空间，那么它具有哪一种几何呢？如果把测地线当成曲面上的"直线"，则几何是非Euclid的.

这样，如果把球面本身当作一个空间来研究，那么它就有它自己的几何，并且即使取熟知的纬度和经度作为点的坐标，曲面的几何也不是Euclid的，因为"直线"或测地线是曲面上的大圆弧. 然而，如果把球面看成三维空间中的一张曲面，球面的几何就是Euclid的. 曲面上两点之间最短距离便是三维Euclid几何的线段(虽然它并不在曲面上). Gauss的工作意味着，至少在曲面上有非Euclid几何，如果把曲面本身看成一个空间的话. Gauss是否看到他的曲面几何的这种非Euclid的解释，那就不清楚了.

人们还可看得更远些. 可以认为一张曲面所固有的E, F和G是由参数方程(1)确定的. 但是，可以从曲面出发引进两族参数曲

线,然后几乎任意地选取 u 和 v 的函数 E, F 和 G. 于是曲面有这些 E, F 和 G 所确定的几何. 这个几何对于曲面是内蕴的,而与周围的空间没有关系. 结果是,随着 E, F 和 G 的不同的选取,同一张曲面可以有不同的几何.

含义是更为深刻的. 如果在同一张曲面上能够选取不同的 E, F 和 G 的组,从而确定不同的几何,那么为什么在我们的三维空间中不能选取不同的距离函数呢? 当然,在直角坐标系中通常的距离函数是 $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, 如果从 Euclid 几何出发,这是必然的,因为它恰好是勾股定理的解析表示. 然而,对于空间的点给定相同的直角坐标,可以选取 ds^2 的不同的表达式,从而得到该空间的完全不同的几何——一种非 Euclid 几何. 把 Gauss 在研究曲面中首先获得的这种思想推广到任何空间,是由 Riemann 继承并发展的.

3. Riemann 研究几何的途径

由 Gauss, Lobatchevsky 和 Bolyai 的工作引起的,关于物理空间的几何我们可以相信些什么,这个疑问推动了 19 世纪的重大创造之一——Riemann 几何的产生,创立者是最深刻的几何哲学家 Georg Bernhard Riemann. 虽然 Riemann 并不知道 Lobatchevsky 和 Bolyai 工作的细节,但 Gauss 是知道他们的,而 Riemann 肯定知道 Gauss 对 Euclid 几何的真实性和必然适用性的怀疑. 这样,在几何领域中 Riemann 追随 Gauss,虽然在函数论中他追随 Cauchy 和 Abel. 他对几何的研究也受心理学家 Johann Friedrich Herbart(1776—1841)教导的影响.

Gauss 给 Riemann 指定把几何基础作为他应该发表的就职演说的题目,这是大学讲师为取得大学教授资格所应作的演说. 这个讲演于 1854 年对格丁根的全体教员发表,有 Gauss 在场,并在

1868 年以《关于作为几何学基础的假设》为题出版①.

为竞争巴黎科学院的奖金,Riemann 在 1861 年写了一篇关于热传导的文章,这篇文章常常叫做他的《巴黎之作》(*Pariserarbeit*),在文中 Riemann 发现必须进一步考虑他关于几何的思想,在这里他对他的 1854 年的文章作了某些技术性的加工. 1861 年的这篇没有获奖的文章,在他死后发表在 1876 年他的《文集》(*Collected Works*)②中. 在《文集》的第二版里,Heinrich Weber 在一篇注解中解释了 Riemann 的高度压缩了的题材.

Riemann 提出的空间的几何并不只是 Gauss 的微分几何的推广. 他重新考虑了研究空间的整个途径. Riemann 研究了上述关于物理空间我们究竟可以确信什么的问题. 在通过经验确定物理空间中成立的特殊公理之前,在真实的经验空间中什么条件或什么事实必须预先假定呢? Riemann 的目的之一是要证明,Euclid 的独特的公理,与其说如人们历来相信的那样是自明的真理,还不如说是经验性的. 他采用了解析的途径,因为在几何证明中,由于我们的感觉,我们可能错误地假定一些不是显然可以承认的事实. 这样,Riemann 的思想是:依靠分析我们可以从关于空间无疑是先验的东西出发,导出必然的结论. 于是就会知道空间的任何其他的性质都是经验的. Gauss 自己研究了完全相同的问题,但是仅仅发表了这个研究的论曲面的部分. Riemann 对于什么是先验的探讨导致他研究空间的局部性质;换句话说,就是采用微分几何的途径,这同在 Euclid 几何中或者在 Gauss, Bolyai 和 Lobatchevsky 的非 Euclid 几何中,把空间作为一个整体进行考虑是相对立的. 在作详细的考察之前,我们应该预先说明,表述在 1854 年的讲演

---

① *Abh. der Ges. der Wiss. zu Gött.*, 13, 1868, 1～20 = *Werke*, 第二版, 272～287. 英译本可在 W. K. Clifford 的 *Collected Mathematical Papers* 中找到. 在 *Nature*, 8, 1873, 14～36 和 D. E. Smith 的 *A Source Book in Mathematics*, 411～425 中也有.

② *Werke*, 第二版, 1892, 391～404.

以及在原稿中的 Riemann 的思想是模糊的. 一个原因是 Riemann 为了适应他的听众——格丁根的全体教员. 部分的模糊也和他文章开头的哲学考虑有关.

Gauss 关于 Euclid 空间中曲面的内蕴几何学,开辟了一个很大的领域,Riemann 对任一空间发展了一种内蕴几何. 虽然三维的情形显然是一种重要的情形,Riemann 还是宁可处理 n 维几何,并且他把 n 维空间叫做一个流形. n 维流形中的一个点,可以用 n 个可变参数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的一组指定的特定值来表示,而所有这种可能的点的总体就构成 n 维流形本身,正如在一个曲面上的点的全体构成曲面本身一样. 这 n 个可变参数就叫做流形的坐标. 当这些 x_i 连续变化时,对应的点就遍历这个流形.

因为 Riemann 认为我们只能局部地了解空间,所以他从定义两个一般点之间的距离出发,这两个点所对应的坐标只相差无穷小. 他假定距离的平方是

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g_{ij}\,\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_j, \tag{10}$$

其中 g_{ij} 是坐标 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的函数, $g_{ij} = g_{ji}$, 并且(10)的右边对 $\mathrm{d}x_i$ 的所有可能值总是正的. $\mathrm{d}s^2$ 的这个表示式是 Euclid 距离公式

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \cdots + \mathrm{d}x_n^2$$

的推广. 他提到有可能假定 $\mathrm{d}s$ 是微分 $\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \cdots, \mathrm{d}x_n$ 的一个四次齐次函数的四个根中的一个. 但是他没有深入研究这种可能性. 由于允许 g_{ij} 是坐标的函数,所以 Riemann 提供了空间的性质可以逐点而异的可能性.

虽然 Riemann 在他 1854 年的文章中没有明确地阐述下面的定义,但在他的心目中无疑是有的,因为它们与 Gauss 对曲面所做的是相同的. Riemann 流形上的一条曲线由 n 个函数

$$x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t),\ \cdots,\ x_n = x_n(t) \tag{11}$$

给定. 于是,在 $t=\alpha$ 和 $t=\beta$ 之间的曲线的长度定义为

$$(12)\qquad l=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\int_\alpha^\beta \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t}}\mathrm{d}t.$$

在两个给定点 $t=\alpha$ 和 $t=\beta$ 之间的最短曲线——测地线,随之可用变分法确定. 用变分学的记号,这就是适合条件 $\delta\int_\alpha^\beta \mathrm{d}s=0$ 的曲线. 于是,必须确定形如(11)的特定的函数,它给出两点之间的这条最短道路. 取弧长 s 作为参数,测地线的方程可以证明是

$$\frac{\mathrm{d}^2x_i}{\mathrm{d}s^2}+\sum_{\lambda,\mu}\begin{Bmatrix}\lambda & \mu\\ & i\end{Bmatrix}\frac{\mathrm{d}x_\lambda}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x_\mu}{\mathrm{d}s}=0,\ i,\lambda,\mu=1,2,\cdots,n.$$

这是 n 个二阶常微分方程的方程组①.

两条曲线在点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 处相交,一条曲线由方向 $\mathrm{d}x_i/\mathrm{d}s\ (i=1,2,\cdots,n)$ 确定,另一条由 $\mathrm{d}x_i'/\mathrm{d}s'\ (i=1,2,\cdots,n)$ 确定,其中撇表示属于第二个方向的值,这两条曲线在交点处的交角 θ 由公式

$$(13)\qquad \cos\theta=\sum_{i,i'=1}^n g_{ii'}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x_i'}{\mathrm{d}s'}$$

确定. 仿照 Gauss 对曲面所用的那套方法,以上面的定义作基础,可以推出一种度量的 n 维几何. 所有的度量性质由 $\mathrm{d}s^2$ 的表达式中的系数 g_{ij} 确定.

在 Riemann 1854 年的文章中的第二个重要的概念,是流形的曲率的概念. Riemann 企图通过它去刻画 Euclid 空间和更一般的空间,在这种空间中图形可以挪动而不改变其形状或大小. Riemann 关于任意 n 维流形的曲率的概念,是 Gauss 关于曲面的总曲率概念的推广. 如同 Gauss 的概念一样,流形的曲率可用一些量定义,而这些量可以在流形自身上确定,从而无需把流形想象成位于某一更高维的流形中.

---

① 关于大括号记号的意义见下面的(19)式. Riemann 没有明确地给出这些方程.

在 n 维流形中给定一点 P,Riemann 考虑在这点的一个二维流形,这个二维流形在 n 维流形中. 这个二维流形由经过 P 点的无穷多条单参数测地线构成,这些测地线同流形的平面截口在 P 点相切. 现在一条测地线可以用点 P 和在该点的一个方向来描述. 设 dx_1', dx_2', $\cdots$, dx_n'是一条测地线的方向,而 dx_1'', dx_2'', $\cdots$, dx_n''是另一测地线的方向. 则在 P 点的单参数无穷多条测地线中,任一条的方向的第 i 个分量由下式给出:

$$dx_i = \lambda' dx_i' + \lambda'' dx_i''$$

(λ'和λ''要受条件$\lambda'^2 + \lambda''^2 + 2\lambda'\lambda''\cos\theta = 1$ 的限制,这个条件是由条件 $\sum g_{ij}(dx_i/ds)(dx_j/ds) = 1$ 导出的). 这一组测地线构成一个二维流形,它有一个 Gauss 曲率. 因为经过 P 点的这种二维流形有无穷多,所以在 n 维流形的一个点处就有无穷多个曲率. 但是,在这些曲率的测度中,可以从 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 个推得其余的. 曲率的测度的一个显式现在可以推出来. 这是 Riemann 在他 1861 年的文章中就已做了的,在下面即将给出. 对于流形就是一个曲面的情形,Riemann 的曲率恰恰就是 Gauss 的总曲率. 严格地说,正如 Gauss 的曲率一样,Riemann 的曲率是一种加在流形上而非流形自身的度量性质.

Riemann 在完成了他的 n 维几何的一般研究,并说明如何引进曲率以后,进而考虑特定的流形,在这种流形上,有限的空间形式应当能够移动,而不改变其大小或形状,并且应当能够按任意方向旋转. 这就把他引到常曲率空间.

当在一点所有曲率的测度都相同,并且等于其他任何点的所有曲率的测度时,我们得到 Riemann 称之为常曲率的流形. 在这种流形上,可以讨论全等的图形. 在 1854 年的文章中 Riemann 给出下述结果但没有详说:如果 α 是曲率的测度,常曲率流形上无穷小距离元素公式变成(在一适当的坐标系中)

$$(14)\qquad ds^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}dx_i^2}{\left(1+(\alpha/4)\sum x_i^2\right)^2}.$$

Riemann认为曲率α必须是正的或是零,所以当$\alpha>0$时我们得到一个球面空间,而当$\alpha=0$时得到一个Euclid空间,反之亦然.他还认为,如果一个空间是无限伸展的,其曲率必须为零.然而,他确实提示过,可能有现实的常数负曲率曲面①.

对$\alpha=a^2>0$,且$n=3$的情形,由于Gauss的工作,我们得到一种三维的球面几何,虽然不能把它形象化.这个空间在广度上有限但是无界;在其中所有的测地线都是定长,等于$2\pi/a$,并且回到它们自身;空间的体积是$2\pi^2/a^3$.对于$a^2>0$和$n=2$的情形,我们得到通常的球面的空间;测地线当然就是大圆并且是有限的;而且,任意两条测地线交于两点.至于Riemann是否认为常数正曲率曲面上的测地线都交于一点或两点,实际上是不清楚的.他可能倾向于后者.Felix Klein后来指出(见下一章),这里涉及两种不同的几何.

Riemann还指出空间的无界性(球的表面就是这种情形)和无限性之间的一种区别,这种区别后面还要讲到.他说,无界性与任何其他由经验得来的事情,例如同无限广度相比,有更大的经验可信性.

Riemann在他的文章结尾还指出,因为物理空间是一种特殊的流形,所以那种空间的几何不能只是从流形的一般概念推出来.把物理空间同其他三维流形区别开来的那些性质,只能从经验得到.他附带地说:"关于流形的这些假设,在何种程度上以及在哪一点上可以由经验肯定,这个认识问题尚待解决."特别,Euclid几何的公理可能只是物理空间的近似写照.同Lobatchevsky一样,

① Ferdinand Minding已经知道这种曲面(*Jour. für Math.*, 19, 1839, 370~387,特别是pp. 378~380),包括那一个后来叫做伪球面的曲面(见第38章第2节).还可看Gauss, *Werke*, 8, 265.

Riemann 相信天文学将判定哪种几何符合于空间. 他以下面的预言性评论结束他的文章:"所以,或者作为空间基础的客体必须形成一个离散的流形,或者在作用于它上面的约束力之下,我们应当从它的外部寻找其度量关系的根据……这就把我们引到另一门科学——物理学的领域,我们的工作的宗旨不容许我们今天进入那个领域."

这个观点被 William Kingdon Clifford① 所发展.

> 事实上我认为:(1)空间的小部分有一种性质,类似于曲面上的小山,这曲面平均看起来是扁平的.(2)呈弯曲的或畸变的这种性质以波浪方式连续地从空间的一部分传到另一部分.(3)空间曲率的这种变化,确实如我们称之为物质运动的那种现象中所发生的情况一样,不管这种物质是有重量的还是像空气那样稀薄的.(4)在这个物理世界中,除了可能遵循连续性规律的这种变化之外,没有其他事情发生.

在曲率不仅逐点变化,而且由于物质的运动也随时间而变化的空间中,通常的 Euclid 几何法则是不成立的. 他接着又说,要想对物理规律作较为严格的研究,就不能忽视空间中的这些"小山". 这样,与其他的大多数几何学家不同,Riemann 和 Clifford 感到,为了确定什么是物理空间的真理,需要把物质和空间结合起来. 这个思路自然就引导到相对论.

Riemann 在他的《巴黎之作》(1861)中回到下述问题:一个度量为

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\,dx_i\,dx_j \tag{15}$$

的给定的 Riemann 空间,在什么时候可以是一个常曲率空间,或

---

① *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 2, 1870, 157 ~ 158 = *Math. Papers*, 20~22.

者甚至是一个 Euclid 空间. 但是,他提出了更为一般的问题:在什么条件下,可以通过方程组

(16) $$x_i = x_i(y_1, y_2, \cdots, y_n),\ i = 1, 2, \cdots, n$$

把如同(15)那样的度量变成一个给定的度量

(17) $$ds'^2 = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}\, dy_i dy_j,$$

当然,这里应理解为 ds 等于 ds',如此,两个空间的几何除了坐标的选取外将是相同的. 变换(16)并不总是可能的,因为正如 Riemann 指出的,在(15)中有 $n(n+1)/2$ 个独立函数,而可用以把 g_{ij} 变成 h_{ij} 的变换只能引进 n 个函数.

为了处理一般的问题,Riemann 引进了一些特殊的量 p_{ijk},我们将代之以更加熟悉的 Christoffel 记号,这里理解为

$$p_{ijk} = \begin{bmatrix} j & k \\ & i \end{bmatrix}.$$

表示成各种形式的 Christoffel 记号是

(18) $$\Gamma_{\alpha\beta,\lambda} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ & \lambda \end{bmatrix} = [\alpha\beta, \lambda] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\lambda}\right),$$

(19) $$\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} = \begin{Bmatrix} \alpha & \beta \\ & \lambda \end{Bmatrix} = \{\alpha\beta, \lambda\} = \sum_i g^{i\lambda}\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ & i \end{bmatrix},$$

其中 $g^{i\lambda}$ 是行列式 g 中 $g_{i\lambda}$ 的余子式除以 g. Riemann 还引进现在通称的 Riemann 四指标记号

(20) $$(\mu\lambda, jk) = R_{\lambda\mu,jk} = \frac{\partial \Gamma_{\lambda j,\mu}}{\partial x_k} - \frac{\partial \Gamma_{\lambda k,\mu}}{\partial x_j} + \sum_{i,\alpha} g^{i\alpha}(\Gamma_{\lambda k,\alpha}\Gamma_{\mu j,i} - \Gamma_{\lambda j,\alpha}\Gamma_{\mu k,i}).$$

然后,Riemann 证明了 ds^2 可以变成 ds'^2 的一个必要条件是

(21) $$(\alpha\delta, \beta\gamma)' = \sum_{r,k,i,h} (rk, ih)\frac{\partial x_r}{\partial y_\alpha}\frac{\partial x_i}{\partial y_\beta}\frac{\partial x_h}{\partial y_\gamma}\frac{\partial x_k}{\partial y_\delta},$$

其中左边的记号指的是对度量 ds' 所构造的量,并且对于每一个遍历 1 到 n 的 α, β, γ, δ 的所有值,(21)都成立.

Riemann 现在回到特殊的问题:在什么条件下给定的 ds^2 可以变成带常系数的.他先导出关于流形曲率的一个显式.在 1854 年的文章中已经给出的一般定义用到从空间的一点 O 出发的测地线.设 d 和 δ 确定两个向量或从 O 点出发的两条测地线的方向(每一个方向由测地线的切线的分量规定).然后,考虑从点 O 出发并由 $\kappa d+\lambda\delta$ 给定的测地线向量束,其中 κ 和 λ 是参数.如果设想 d 和 δ 作用在表示任一曲线的 $x_i=f_i(t)$ 上,则二阶微分 $(\kappa d+\lambda\delta)^2=\kappa^2 d^2+2\kappa\lambda d\delta+\lambda^2\delta^2$ 有意义.于是 Riemann 构造

$$(22)\quad \Omega=\delta\delta\sum g_{ij}dx_i dx_j-2d\delta\sum g_{ij}dx_i dx_j+dd\sum g_{ij}dx_i dx_j .$$

这里,理解为 d 和 δ 形式地作用在它们后面的表达式上(而且 d 和 δ 可交换),所以

$$(23)\quad \delta\delta\sum g_{ij}dx_i dx_j=\delta\Big[\sum(\delta g_{ij})dx_i dx_j+\sum g_{ij}((\delta dx_i)dx_j+dx_i\delta dx_j)\Big],$$

并且 $\delta g_{ij}=\sum_r(\delta g_{ij}/\partial x_r)\delta x_r$.如果计算 Ω,就能发现包含一个函数的所有三阶微分的项都为零.只剩下包含 δx_i, dx_i, $\delta^2 x_i$, δdx_i 和 d^2x_i 的项.通过计算这些项并用记号

$$p_{ik}=dx_i\delta x_k-dx_k\delta x_i,$$

Riemann 得到

$$(24)\quad [\Omega]=\sum_{i,k,r,s}(ik,rs)p_{ik}p_{rs} .$$

现在令 $4\Delta^2=\sum g_{ij}dx_i dx_j\cdot\sum g_{ij}\delta x_i\delta x_j-(\sum g_{ij}dx_i\delta x_j)^2$.

则 Riemann 流形的曲率 K 是

$$(25)\quad K=-\frac{[\Omega]}{8\Delta^2}.$$

全部结论是:若要给定的 ds^2 能够回到形式(对 $n=3$)

$$(26)\quad ds'^2=c_1dx_1^2+c_2dx_2^2+c_3dx_3^2,$$

其中 c_i 都是常数，其必要充分条件是，所有的记号$(\alpha\beta,\ \gamma\delta)$都为零. 在 c_i 全是正的情况下，ds'^2 可以化成 $dy_1^2+dy_2^2+dy_3^2$，即空间是 Euclid 空间. 正如我们能从$[\Omega]$的值看到的，当 K 是零时，空间实质上是 Euclid 的.

值得注意的是，一个 n 维流形的 Riemann 曲率，在曲面的情形就化为 Gauss 总曲率. 事实上，当

$$ds^2=g_{11}dx_1^2+2g_{12}dx_1dx_2+g_{22}dx_2^2$$

时，16 个记号$(\alpha\beta,\ \gamma\delta)$中的 12 个是零，对其余的 4 个我们有

$$(12,\ 12)=-(12,\ 21)=-(21,\ 12)=(21,\ 21).$$

于是 Riemann 的 K 化成

$$k=\frac{(12,\ 12)}{g}.$$

通过(20)，可以证明这个表达式等于曲面总曲率的 Gauss 的表达式.

4. Riemann 的继承者

当 Riemann 1854 年的文章在他逝世后两年(即 1868 年)刊行时，激起了强烈的兴趣，许多数学家忙着去充实他所概述的思想并加以推广. Riemann 的直接继承者是 Beltrami, Christoffel 和 Lipschitz.

Eugenio Beltrami(1835—1900)，是波洛尼亚(Bologna)和意大利其他大学的数学教授，他知道 Riemann 1854 年的文章，但是不知道他 1861 年的文章，他还在研究把 ds^2 的一般表达式化成形式(14)的证明问题①，而形式(14)是 Riemann 已对常曲率空间给出了的. 除这个结果以及证明了 Riemann 的其他几个论断以外，Beltrami 还研究了将在下节考虑的微分不变量的课题.

---

① *Annali di Mat.*, (2), 2, 1868～1869, 232～255 = *Opere Mat.*, 1, 406～429.

Elwin Bruno Christoffel(1829—1900)先是苏黎世后是斯特拉斯堡的数学教授，他推进了 Riemann 那篇文章中的思想. Christoffel 在他的两篇关键性文章①中主要关心的是重新考虑和详细论述 Riemann 在他 1861 年文章中已经稍为粗略地讨论过的题目，那就是一个形式

$$F = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i dx_j$$

在什么时候能够变成另一个形式

$$F' = \sum_{i,j} g_{ij}' dy_i dy_j .$$

Christoffel 寻找它的必要充分条件. 在这篇文章中，他附带地引进了 Christoffel 记号.

让我们首先考虑二维的情形，在这里

$$F = a(dx)^2 + 2b dx dy + c(dy)^2,$$

$$F' = A(dX)^2 + 2B dX dY + C(dY)^2,$$

并假定 x 和 y 可以表示成 X 和 Y 的函数，使得在这变换下 F 变成 F'. 当然，$dx = (\partial x/\partial X)dX + (\partial x/\partial Y)dY$. 现在，当 F 中的 x，y，dx 和 dy 代以相应的 X 和 Y 的表达式，并让 F 的这个新形式中的系数和 F' 的对应系数相等时，就得到

$$a\left(\frac{\partial x}{\partial X}\right)^2 + 2b\frac{\partial x}{\partial X}\frac{\partial y}{\partial X} + c\left(\frac{\partial y}{\partial X}\right)^2 = A,$$

$$a\frac{\partial x}{\partial X}\frac{\partial x}{\partial Y} + b\left(\frac{\partial x}{\partial X}\frac{\partial y}{\partial Y} + \frac{\partial x}{\partial Y}\frac{\partial y}{\partial X}\right) + c\frac{\partial y}{\partial X}\frac{\partial y}{\partial Y} = B,$$

$$a\left(\frac{\partial x}{\partial Y}\right)^2 + 2b\left(\frac{\partial x}{\partial Y}\frac{\partial y}{\partial Y}\right) + c\left(\frac{\partial y}{\partial Y}\right)^2 = C.$$

对于 x 和 y 作为 X 和 Y 的函数，有三个微分方程. 如果它们能够解出来，那我们就知道如何把 F 变成 F' 了. 然而，其中只含有两个

---

① *Jour. für Math.*, 70, 1869, 46～70 和 241～245 = *Ges. Math. Abh.*, 1, 352 ff., 378 ff.

函数. 于是,以 a, b 和 c 为一方,以 A, B 和 C 为另一方,它们之间必定有某些关系. 通过微分上面三个方程和一些代数步骤,就发现这关系是 $K = K'$.

对于 n 元的情形,Christoffel 用的是同一个方法. 他从

$$F = \sum g_{rs} dx_r dx_s,$$

$$F' = \sum g_{rs}' dy_r dy_s$$

出发. 变换是

$$x_i = x_i(y_1, y_2, \cdots, y_n),\ i = 1, 2, \cdots, n.$$

他让 $g = |g_{rs}|$. 如果 Δ_{rs} 是 g_{rs} 在行列式里的余子式,就让 $g^{pq} = \Delta_{pq}/g$. 像 Riemann 一样,他独立地引进了四指标记号(没有逗点)

$$(gkhi) = \frac{\partial}{\partial x_i}[gh, k] - \frac{\partial}{\partial x_h}[gi, k] + \sum_p (\{gi, p\}[hk, h] - \{gh, p\}[ik, p]).$$

然后他推出关于 x_i 作为 y_i 的函数的 $n(n+1)/2$ 个偏微分方程. 有代表性的一个是

$$\sum_{r,s} g_{rs} \frac{\partial x_r}{\partial y_\alpha} \frac{\partial x_s}{\partial y_\beta} = g'_{\alpha\beta}.$$

这些方程是使 $F = F'$ 的变换存在的必要充分条件.

部分是为了讨论这组方程的可积性,部分是由于 Christoffel 愿意考虑 dx_i 的高于两次的形式,所以他作了许多微分和代数推导,证明了

$$(27)\qquad (\alpha\delta\beta\gamma)' = \sum_{g,h,i,k} (gkhi) \frac{\partial x_g}{\partial y_\alpha} \frac{\partial x_h}{\partial y_\beta} \frac{\partial x_i}{\partial y_\gamma} \frac{\partial x_k}{\partial y_\delta},$$

其中 α, β, γ 和 δ 取 1 到 n 的所有值. 总共有 $n^2(n^2-1)/12$ 个这种形式的方程. 这些方程是两个四阶微分形式等价的必要充分条件. 确实,设 $d^{(1)}x$, $d^{(2)}x$, $d^{(3)}x$, $d^{(4)}x$ 是 x 的四组微分,对 y 也照样有四组微分. 如果有四线性形式

$$G_4 = \sum_{g,k,h,i} (gkhi) d^{(1)}x_g d^{(2)}x_k d^{(3)}x_h d^{(4)}x_i,$$

则关系式(27)是 $G_4 = G_4'$ 的必要充分条件，其中 G_4' 是诸 y 变元的类似于 G_4 的形式.

这个理论可以推广到 μ 重微分形式. 事实上，Christoffel 引进了

$$(28)\qquad G_\mu = \sum_{i_1,\cdots,i_\mu} (i_1 i_2 \cdots i_\mu)\, \underset{1}{\partial} x_{i_1}\, \underset{2}{\partial} x_{i_2} \cdots \underset{\mu}{\partial} x_{i_\mu},$$

其中括号里的项几乎与四指标记号一样是用 g_{rs} 来定义的，记号 $\underset{i}{\partial}$ 是用来把 x_i 的微分组同以 $\underset{j}{\partial}$ 作用所得的微分组区别开来. 然后他证明

$$(29)\qquad (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_\mu)' = \sum (i_1 \cdots i_\mu) = \frac{\partial x_{i_1}}{\partial y_{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial x_{i_\mu}}{\partial y_{\alpha_\mu}},$$

并得到 G_μ 可以变成 G_μ' 的必要充分条件.

接着，他给出从一个 μ 重形式 G_μ 导出一个 $(\mu+1)$ 重形式的一般方法. 关键的一步是引进.

$$(30)\qquad (i_1 i_2 \cdots i_\mu i) = \frac{\partial}{\partial x_i}(i_1 i_2 \cdots i_\mu) - \sum_\lambda \left[\{ii_1, \lambda\}(\lambda i_2 \cdots i_\mu) + \{ii_2, \lambda\}(i_1 \lambda i_3 \cdots i_\mu) + \cdots \right].$$

这些 $(\mu+1)$ 指标记号是 $G_{\mu+1}$ 形式的系数. Christoffel 在这里用的方法，就是后来 Ricci 和 Levi-Civita 所谓的协变微分(第 48 章).

Christoffel 关于 Riemann 几何只写了一篇关键性的文章，而波恩大学的数学教授 Rudolph Lipschitz，从 1869 年起在《数学杂志》上却写了大量文章. 虽然他对 Beltrami 和 Christoffel 的工作做了某些推广，但主要的题目和结果跟他们两人是相同的. 关于 Riemann和 Euclid n 维空间的子空间他却给出了某些新的结果.

由 Riemann 创始并由他的三位直接继承者所发展的思想，在 Euclid 微分几何和 Riemann 微分几何两方面都提出了大批新问题. 特别，在三维 Euclid 情形已经得到的结果，被推广到 n 维

中的曲线、曲面和较高维的形式. 在这许多结果中我们将只引述一个.

1886 年, Friedrich Schur(1856—1932)证明了一个后来以他名字命名的定理①. 根据 Riemann 提出曲率概念的思路, Schur 讲到空间的一个定向的曲率. 这种定向由一束测地线 $\mu\alpha + \lambda\beta$ 确定, 其中 α 和 β 是从一点出发的两条测地线的方向. 这个束构成一个曲面并且有一个 Gauss 曲率, Schur 称之为这个定向的 Riemann 曲率. 他于是断言, 如果空间的 Riemann 曲率在每一点都同定向无关, 则 Riemann 曲率在全空间是常数. 因此, 这种流形是一个常曲率空间.

5. 微分形式的不变量

由于研究了 ds^2 的一个给定表达式, 什么时候可以通过形如

$$x_i = x_i(x_1', x_2', \cdots, x_n'), \ i = 1, 2, \cdots, n \tag{31}$$

的变换, 变成另一个这种表达式而保持 ds^2 的值不变这一问题, 人们便清楚地知道流形可以有不同的坐标表示. 然而, 流形的几何性质, 必须同用以表示和研究它的坐标系的选取无关. 从分析上来说, 这些几何性质将由不变量表示, 所谓不变量就是一个表达式, 其形式在坐标变换下不变, 因此, 在不同的坐标系中它在一个给定点有相同的值. 在 Riemann 几何中有兴趣的不变量, 不仅包括含有微分 dx_i 和 dx_j 的基本二次形式, 而且还可以包含系数的导数和其他函数的导数. 所以它们被称为微分不变量.

以二维情形为例, 设

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2 \tag{32}$$

是一个曲面的距离元素(的平方), 则 Gauss 曲率 K 由上面的公式(8)给出. 现在, 如果坐标变成

---

① *Math. Ann.*, 27, 1886, 167～172 和 537～567.

(33) $$u' = f(u, v),\ v' = g(u, v),$$

而 $E\mathrm{d}u^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2$ 变成 $E'\mathrm{d}u'^2+2F'\mathrm{d}u'\mathrm{d}v'+G'\mathrm{d}v'^2$，则有定理说 $K=K'$，其中 K' 与(8)的表达式相同，不过是用带撇的变量. 因此曲面的 Gauss 曲率是一个纯量不变量. 不变量 K 也说成是属于形式(32)的不变量，它只包含 E, F, G 和它们的导数.

微分不变量的研究实际上是由 Lamé 在一个较局限的范围内开始的. 他感兴趣的是三维空间中，从一个正交曲线坐标系到另一个这种坐标系的变换之下的不变量. 对直角 Descartes 坐标他证明了①

(34) $$\Delta_1\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2,$$

(35) $$\Delta_2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

是微分不变量(他称之为微分参数). 譬如，如果 ϕ 在一正交变换(转轴)下变成了 $\phi'(x', y', z')$，同一点在原坐标系和新坐标系中的坐标分别是 (x, y, z) 和 (x', y', z')，则在这点处有

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2=\left(\frac{\partial\phi'}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi'}{\partial y'}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi'}{\partial z'}\right)^2,$$

对于 $\Delta_2\phi$ 类似的方程成立.

对于 Euclid 空间中的直交曲线坐标系，$\mathrm{d}s^2$ 具有形式

(36) $$\mathrm{d}s^2 = g_{11}\mathrm{d}u_1^2+g_{22}\mathrm{d}u_2^2+g_{33}\mathrm{d}u_3^2,$$

Lamé 证明了[见《曲线坐标讲义》(*Leçons sur les coordonnees curvilignes*), 1859,参阅前面第 28 章第 5 节]，在直角坐标系中，由上面 $\Delta_2\phi$ 给定的 ϕ 的梯度的发散量具有不变形式

$$\Delta_2\phi = \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}g_{33}}}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\sqrt{\frac{g_{22}g_{33}}{g_{11}}}\frac{\partial\phi}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\sqrt{\frac{g_{33}g_{11}}{g_{22}}}\frac{\partial\phi}{\partial u_2}\right)+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\sqrt{\frac{g_{11}g_{22}}{g_{33}}}\frac{\partial\phi}{\partial u_3}\right)\right].$$

① *Jour. de l'Ecole Poly.*, 14, 1834, 191～288.

在同一著作中，Lamé 顺便给出了关于由(36)给定的 ds^2 何时确定 Euclid 空间中一个曲线坐标系的条件，以及如果这样做了，又如何把它变成直角坐标.

Beltrami 第一个对曲面论的不变量作了研究①. 他给出了下列这两个微分不变量

$$\Delta_1\phi = \frac{1}{EG-F^2}\left\{E\left(\frac{\partial\phi}{\partial u}\right)^2 - 2F\frac{\partial\phi}{\partial u}\frac{\partial\phi}{\partial v} + G\left(\frac{\partial\phi}{\partial v}\right)^2\right\},$$

$$\Delta_2\phi = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G\phi_u - F\phi_v}{\sqrt{EG-F^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{-F\phi_u + E\phi_v}{\sqrt{EG-F^2}}\right)\right\}.$$

这些量都有几何意义. 例如对 $\Delta_1\phi$，如果 $\Delta_1\phi = 1$，则曲线 $\phi(u, v) =$ 常数是曲面上测地线族的正交轨线.

寻找微分不变量的工作随后转到对 n 个变量的二次微分形式. 其理由仍旧是这些不变量与坐标的选取无关，它们代表流形本身的内蕴性质. 譬如 Riemann 曲率就是一个纯量不变量.

Beltrami 用 Jacobi 给出的方法②，成功地把 Lamé 不变量转到了 n 维 Riemann 流形③. 设 g 照例是 g_{ij} 的行列式，g^{ij} 是 g 中 g_{ij} 的余子式除以 g，则 Beltrami 证明了 Lamé 的第一个不变量变成

$$\Delta_1(\phi) = \sum_{i,j} g^{ij}\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\frac{\partial\phi}{\partial x_j}.$$

这就是 ϕ 的梯度的平方的一般形式. 对于 Lamé 的第二个不变量，Beltrami 得到

$$\Delta_2(\phi) = \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{g}\sum_j g^{ij}\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right).$$

---

① *Gior. di Mat.*, 2, 1864, 267～282，后来的文章在 Vols. 2 和 3 = *Opere Mat.*, 1, 107～198.

② *Jour. für Math.*, 36, 1848, 113 ～ 134 = *Werke*, 2, 193～216.

③ *Memorie dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna*, (2), 8, 1868, 551 ～ 590 = *Opere Mat.*, 2, 74～118.

他还引进了混合微分不变量

$$\Delta_1(\phi\psi) = \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_j}.$$

这就是 ϕ 和 ψ 的梯度的数量积的一般形式.

当然,形式 ds^2 本身在坐标变换下是一个不变量. 由此,正如我们在前节看到的,Christoffel 推出的他的高阶微分形式 G_4 和 G_μ,也是不变量. 而且他说明了如何从 G_μ 导出 $G_{\mu+1}$,而 $G_{\mu+1}$ 也是不变量. 对这种不变量的构造,Lipschitz 也作了研究,不变量的数量和种类是繁多的. 正如我们将要看到的,这个微分不变量理论对于张量分析是一种启示.

参考书目

Beltrami, Eugenio: *Opere matematiche*, 4 vols., Ulrico Hoepli, 1902～1920.

Clifford, William K.: *Mathematical Papers*, Macmillan, 1882; Chelsea (reprint), 1968.

Coolidge, Julian L.: *A History of Geometrical Methods*, Dover (reprint), 1963, pp. 355～387.

Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, III, Teil 3, various articles, B. G. Teubner, 1902～1907.

Gauss, Carl F.: *Werke*, 4, 192～216, 217～258, Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1880. A translation, "General Investigations of Curved Surfaces", has been reprinted by Raven Press, 1965.

Helmholtz, Hermann von: "Über die tatsächlihen Grundlagen der Geometrie", *Wissenschaftliche Abhandlungen*, 2, 610～617.

Helmholtz, Hermann von: "Über die Tatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen", *Nachrichten König. Ges. der Wiss. zu Gött.*, 15, 1868, 193～221; *Wiss. Abh.*, 2, 618～639.

Helmholtz, Hermann von: "Über den Ursprung Sinn und Bedeutung der geometrischen Sätze"; English translation, "On the Origin and Significance of Geometrical Axioms", in Helmholtz: *Popular Scientific Lectures*, Dover (reprint), 1962, 223～

249. Also in James R. Newman: *The World of Mathematics*, Simon and Schuster, 1956, Vol. 1,647～668.

Jammer, Max: *Concepts of Space*, Harvard Univ. Press, 1954.

Killing, W.: *Die nicht-euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung*, B. G. Teubner, 1885.

Klein, F.: *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im* 19. *Jahrhundert*, Chelsea (reprint), 1950, Vol. 1,6～62; Vol. 2,147～206.

Pierpont, James: "Some Modern Views of Space", *Amer. Math. Soc. Bull.*, 32, 1926,225～258.

Riemann, Bernhard: *Gesammelte mathematische Werke*, 2nd ed., Dover (reprint), 1953, pp. 272～287 and 391～404.

Russell, Bertrand: *An Essay on the Foundations of Geometry* (1897), Dover (reprint), 1956.

Smith, David E.: *A Source Book in Mathematics*, Dover (reprint), 1959, Vol. 2,411～425,463～475. This contains translations of Riemann's 1854 paper and Gauss's 1822 paper.

Staeckel, P.: "Gauss als Geometer", *Nachrichten König. Ges. der Wiss. zu Gött.*, 1917, Beiheft, 25～140; also in *Werke*, 10_2.

Weatherburn, C. E.: "The Development of Multidimensional Differential Geometry", *Australian and New Zealand Ass'n for the Advancement of Science*, 21,1933, 12～28.

第 38 章

射影几何与度量几何

> 但总应要求一个数学主题变成直观上显然，才可认为研究到头了……
>
> Felix Klein

1. 引　言

当研究非 Euclid 几何之时和之前，射影几何的研究是主要的几何活动. 再者，从 von Staudt 的著作中(第 35 章第 3 节)，显然的是，射影几何在逻辑上是先于 Euclid 几何的，因为它所处理的是构成几何图形的最根本的定性方面的和描述方面的性质，而并没有用到线段与角的度量. 这个事实提示出 Euclid 几何可能是射影几何的特例. 现就非 Euclid 几何而言，至少就常曲率空间的非 Euclid 几何而言，也可能是射影几何的特例. 于是射影几何与非 Euclid 几何间的关系成为研究的主题，而后者是度量几何，因为它以距离作为基本概念. 弄清射影几何与 Euclid 以及与非 Euclid 几何之间的关系，是我们将进行考查的一个很大的研究成果. 同等重要的是证明基本非 Euclid 几何的相容性.

2. 作为非 Euclid 几何模型的曲面

继 Riemann 工作之后，最重要的几何要算是常曲率空间的几何了. Riemann 自己在他 1854 年论文中指出，只要把球面上的测地线取作“直线”，就能够在球面上实现一个二维的正的常曲率空

间. 这种非 Euclid 几何，现在称为二重椭圆几何，理由以后将会明白. 在 Riemann 的工作以前，Gauss，Lobatchevsky 和 Bolyai 的非 Euclid 几何，后来 Klein 称为双曲几何，是在平面上的几何，引进普通直线(自然是无穷直线)作为测地线. 这种几何和 Riemann 几何的关系是不清楚的. Riemann 和 Minding[①] 曾考虑到负的常曲率的曲面，但他们两人都未指出与双曲几何的关系.

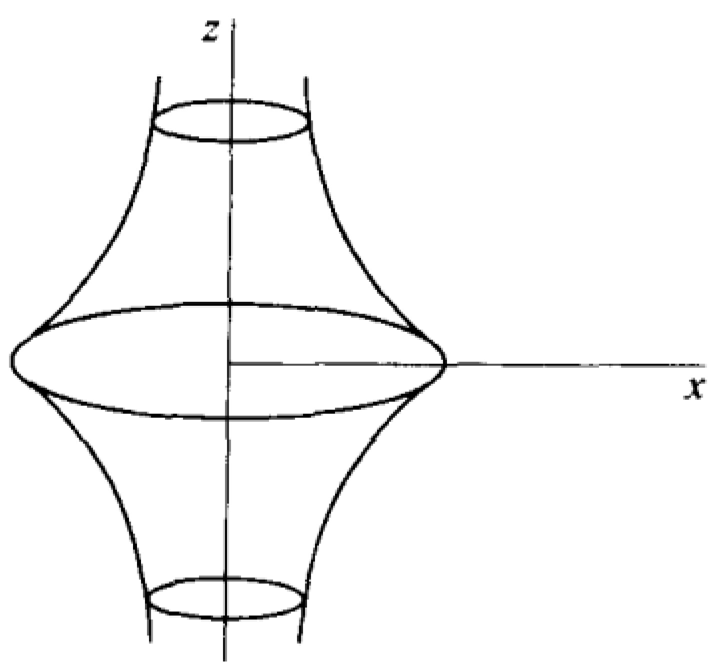


图 38.1

Beltrami 不依赖于 Riemann 而独自认识到[②]常曲率的曲面是非 Euclid 几何空间. 他在曲面上给出双曲几何的有限表示法[③]，这证明了双曲平面有限部分的几何在负的常曲率的曲面上成立，只要把曲面上的测地线看作直线. 曲面上的长度和角度就是普通 Euclid 几何曲面上的长度和角度. 一个这样的曲面名为伪球面(图 38.1)，它是由一条名为曳物线(tractrix)的曲线绕渐近线旋转而成的，曳物线方程是

$$z = k \log \frac{k + \sqrt{k^2 - x^2}}{x} - \sqrt{k^2 - x^2},$$

曲面方程为

$$z = k \log \frac{\sqrt{k^2 - x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \sqrt{k^2 - x^2 - y^2}.$$

曲面的曲率为 $-1/k^2$. 于是伪球面是 Gauss，Lobatchevsky 和 Bolyai 的平面有限部分的模型. 在伪球面上的一个图形可以移动并适当弯曲使之与曲面吻合，正如同一个平面图形可以弯曲使之

---

① *Jour. für Math*, 19, 1839, 370～387.

② *Annali di Mat.*, 7, 1866, 185 ～ 204 = *Opere Mat.*, 1, 262～280.

③ *Gior. di Mat.*, 6, 1868, 248 ～ 312 = *Opere Mat.*, 1, 374～405.

与圆柱面吻合一样.

Beltrami 证明一块 Lobatchevsky 平面可以在负常曲率曲面上实现. 然而没有负常曲率的正则解析曲面使得全部 Lobatchevsky 几何在其上成立. 所有这种曲面有一条奇异曲线——切平面经过它时不连续——所以经过此曲线的曲面的延拓不能使代表 Lobatchevsky 几何的图形连续. 这是 Hilbert 得出的结果①.

这方面还值得指出的是, Heinrich Liebmann(1874—1939)②证明了球面是唯一正的常曲率封闭解析曲面(无奇异点), 从而是唯一能用来作为二重椭圆几何的 Euclid 模型.

这些模型的发展帮助数学家了解并看出基本非 Euclid 几何的意义. 必须记住, 这些二维的非 Euclid 几何基本上就是平面几何, 其中的直线与角是 Euclid 几何中通常的直线与角. 双曲几何虽是以这种方式来论述的, 但数学家似仍感其结论奇异, 只是勉强承认它们属于数学. Riemann 以微分几何观点提出的二重椭圆几何, 甚至还没有像平面几何的公理推导. 于是数学家只能从球面上的几何所提供的线索来看出它的一点意义. 只是通过为寻求 Euclid 几何与射影几何的关系, 人们才从另一方面的研究, 对这些非 Euclid 几何的性质获得好得多的理解.

3. 射影几何与度量几何

Poncelet 虽引进图形的射影和度量性质间的区别, 并在他的 1822 年的书 *Traité* 中说道, 射影性质在逻辑上是更基本的, 但开

---

① *Amer. Math. Soc., Trans.*, 2, 1901, 86～99 = *Ges. Abh.*, 2, 437～448. 证明与进一步历史细节见于 David Hilbert 的 *Grundlagen der Geometrie* 7th ed., B. G. Teubner, 1930 的附录 V. 定理假设双曲几何的直线是曲面上的测地线, 长度与角度是曲面上 Euclid 的长度与角度.

② *Nachrichten König. Ges. der Wiss. zu Gött.*, 1899, 44～55; *Math. Ann.*, 53, 1900, 81～112; 和 54, 1901, 505～517.

始在与长度和角的大小无关的基础之上建立射影几何的人却是von Staudt(第35章第3节). 在1853年法兰西学院教授Edmond Laguerre(1834—1886)虽然起初关心的是研究射影变换下角度如何变化的情况,却以给予角的度量提供射影基础,实际上提出了根据射影概念来建立Euclid几何度量性质的这一目标①.

求两已给相交直线之间夹角的度量,可考虑通过原点分别与此两已知直线平行的两直线. 设过原点的直线方程(非齐次坐标)为$y=x\tan\theta$, $y=x\tan\theta'$. 设$y=\mathrm{i}x$及$y=-\mathrm{i}x$为过原点到无穷远圆点,即到$(1,\mathrm{i},0)$与$(1,-\mathrm{i},0)$两点的两直线(虚的). 令此四直线分别为u, u', w及w'. 设ϕ为u与u'间的夹角,则Laguerre的结果为

$$\phi=\theta'-\theta=\frac{\mathrm{i}}{2}\log(uu',ww'), \tag{1}$$

其中(uu',ww')是四直线的交比②. (1)式的意义是它可以作为用交比这一射影概念来定义角的大小. 对数函数自然是纯数量性的,故可在任何几何中引进.

与Laguerre无关,Cayley独立地迈进了第二步. 他从代数观点研究几何. 实际上他的兴趣在于代数形式(齐次多项式型)的几何解释. 这是我们将在第39章内讨论的主题. 为了要证明度量概念能够用射影语言来表达,他专心致力于Euclid几何与射影几何的关系,我们要描述的工作是他的《关于代数形式的第6篇论文》(Sixth Memoir upon Quantics)③.

Cayley的工作实际是Laguerre的思想的推广. 后者用无穷远圆点定义平面角,虚圆点实际是退化的二次曲线. 在二维时Cay-

---

① *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 12, 1853, 57～66 = *Œuvres*, 2, 6～15.

② 交比本身是一个复数,系数i/2保证直角的大小为π/2. 此交比的计算可在射影几何教科书中见到. 例如参看: William C. Graustein: *Introduction to Higher Geometry*, Macmillan, 1933, Chap. 8.

③ *Phil. Trans.*, 149, 1859, 61～91 = *Coll. Math. Papers*, 2, 561～606.

ley 用任一二次曲线代替虚圆点,而在三维时他引进任何二次曲面. 这些图形他称之为绝对形. Cayley 断言图形所有的度量性质,无非就是加上了绝对形或者关于绝对形的射影性质. 他于是证明这个原则怎样使我们能导出角的新表达式与两点间距离的表达式.

他从平面上点可用齐次坐标表示的事实出发,这些坐标不看作距离或者距离的比,而作为既定的基本概念,无需乎也不能给予任何解释. 为定义距离与角度大小,他引入二次型

$$F(x, x) = \sum_{i, j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j, \; a_{ij} = a_{ji}$$

与双线性型

$$F(x, y) = \sum_{i, j=1}^{3} a_{ij} x_i y_j .$$

方程 $F(x, x) = 0$ 定义一条二次曲线,即 Cayley 的绝对形. 绝对形的线坐标方程为

$$G(u, u) = \sum_{i, j=1}^{3} A^{ij} u_i u_j = 0,$$

其中 A^{ij} 是 F 的系数行列式 $|a|$ 中 a_{ij} 的余因子.

Cayley 用下列公式定义 x 与 y 两点间的距离 δ,其中 $x = (x_1, x_2, x_3)$ 及 $y = (y_1, y_2, y_3)$:

$$\delta = \arccos \frac{F(x, y)}{[F(x, x)F(y, y)]^{1/2}}. \tag{2}$$

线坐标为 $u = (u_1, u_2, u_3)$ 及 $v = (v_1, v_2, v_3)$ 的两直线的夹角 ϕ 定义为

$$\cos \phi = \frac{G(u, v)}{[G(u, u)G(v, v)]^{1/2}}. \tag{3}$$

若取特殊二次曲线 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ 为绝对形,则上述两个一般公式就变得简单. 这时,若 (a_1, a_2, a_3) 与 (b_1, b_2, b_3) 是两点的齐次坐标,则它们之间的距离由下式给出:

$$\arccos \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}. \tag{4}$$

若两直线的齐次线坐标为(u_1, u_2, u_3)与(v_1, v_2, v_3),则它们之间的夹角ϕ由下式给出：

$$\cos \phi = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}. \tag{5}$$

关于距离的表达式,若用简短写法 $xy = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$,并设 $a = (a_1, a_2, a_3)$,b 与 c 是直线上三点,则

$$\arccos \frac{ab}{\sqrt{aa}\sqrt{bb}} + \arccos \frac{bc}{\sqrt{bb}\sqrt{cc}} = \arccos \frac{ac}{\sqrt{aa}\sqrt{cc}}.$$

即距离的相加法则照样成立. 取绝对形二次曲线为无穷远圆点(1, i, 0)及(1, −i, 0),Cayley 证明距离与角度的公式将化成普通的 Euclid 公式.

读者注意,长度和角度的表达式里包含绝对形的代数表达式. 一般,任一 Euclid 度量性质的解析表达式包含着该性质与绝对形的关系式. 度量性质不是图形本身的性质,而是图形相关于绝对形的性质. 这是 Cayley 以一般射影关系来决定度量的思想. 射影几何中度量概念的地位和前者更大的普遍性,用 Cayley 的话来说:"度量几何是射影几何的一部分."

Cayley 的思想为 Felix Klein (1849—1925)所采纳,并将它推广到包括非 Euclid 几何. Klein 是格丁根的教授,是 19 世纪后期到 20 世纪初期第一流德国数学家之一. 在 1869～1870 年间他学习了 Lobatchevsky, Bolyai, von Staudt 的研究工作;然而即使在 1871 年他还不知道 Laguerre 的结果. 他觉得利用 Cayley 的思想有可能把非 Euclid 几何、双曲几何与二重椭圆几何都包括在射影

几何里面. 他在1871 年① 的一篇论文中概略叙述了他的思想，并发展成为两篇文章②. Klein 是第一个认识到无需用曲面来获得非Euclid 几何的模型的人.

Klein 首先指出 Cayley 没有说清楚他心目中的坐标究竟有什么意义. 它们或者是没有几何解释的变量，或者是 Euclid 几何的距离. 但要从射影几何中推导出度量几何，必须在射影基础上建立坐标. von Staudt 曾证明(第 35 章第 3 节)用他的投射代数(algebra of throws)可能给点规定以数. 但他用了 Euclid 平行公理. 看来 Klein 清楚地认识到这个公理能够去掉，并在 1873 年的论文中证明了这是能做到的. 于是四个点的、四条直线的或者四个平面的坐标和交比，都可以在纯粹射影的基础上定义.

Klein 的主要思想是把 Cayley 绝对形二次曲面(若考虑三维几何)的性质具体化，就能证明依赖于绝对形性质的 Cayley 度量将产生双曲几何与二重椭圆几何. 当二次曲面是实椭球面或实椭球抛物面，或实双叶双曲面时，便得到 Lobatchevsky 的度量几何；而当二次曲面是虚的时，便得到 Riemann 非 Euclid 几何(正的常曲率). 如果绝对形是球面虚圆，其齐次坐标方程为 $x^2+y^2+z^2=0$, $t=0$，则得出普通的 Euclid 度量几何. 于是度量几何成为射影几何的特例.

我们用二维几何来领悟 Klein 的思想. 在射影平面内选取一个二次曲线；此二次曲线将为绝对形. 其点坐标方程为

$$F=\sum_{i,j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j=0\,, \tag{6}$$

其线坐标方程为

$$G=\sum_{i,j=1}^{3}A^{ij}u_iu_j=0. \tag{7}$$

---

① *Nachrichten König. Ges. der Wiss. zu Gött.*, 1871, 419～433 = *Ges. Math. Abh.*, 1,244～253.

② *Math. Ann.*, 4,1871,573～625;又 6,1873, 112～145 = *Ges. Math. Abh.*, 1,254～305,311～343.

要推导Lobatchevsky几何,二次曲线必须是实的,即其平面齐次坐标方程为 $x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$;对正的常曲率曲面上的Riemann几何来说,二次曲线是虚的,例如 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$;对Euclid几何,二次曲线退化成两根重合直线,齐次坐标用 $x_3=0$ 表示,并在此轨迹上选取两个虚点,其方程为 $x_1^2+x_2^2=0$,即无穷远圆点,它的齐次坐标为 $(1, \mathrm{i}, 0)$及$(1, -\mathrm{i}, 0)$. 在各种情况下二次曲线都是实方程.

为了说得具体起见,设二次曲线如图38.2所示. 若 P_1 与 P_2 为一直线的两点,此直线与绝对形相遇于两点(实的或虚的). 则距离取作

(8) $$d = c\log(P_1P_2, Q_1Q_2),$$

括号中的量表示四个点的交比,c 是一常量. 此交比可用点的坐标表示. 再者,若有三点 P_1, P_2, P_3 在此直线上,立即可以证明

$$(P_1P_2, Q_1Q_2)\cdot(P_2P_3, Q_1Q_2)=(P_1P_3, Q_1Q_2),$$

故得 $P_1P_2+P_2P_3=P_1P_3$.

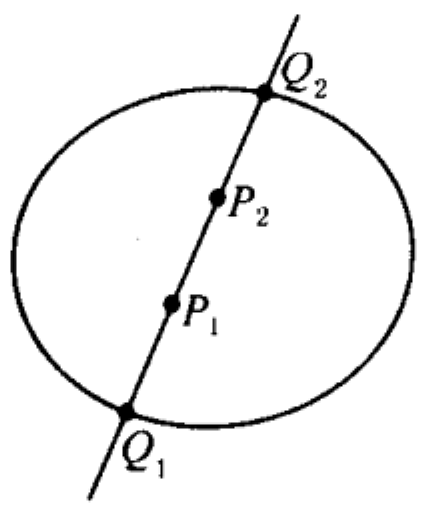


图 38.2

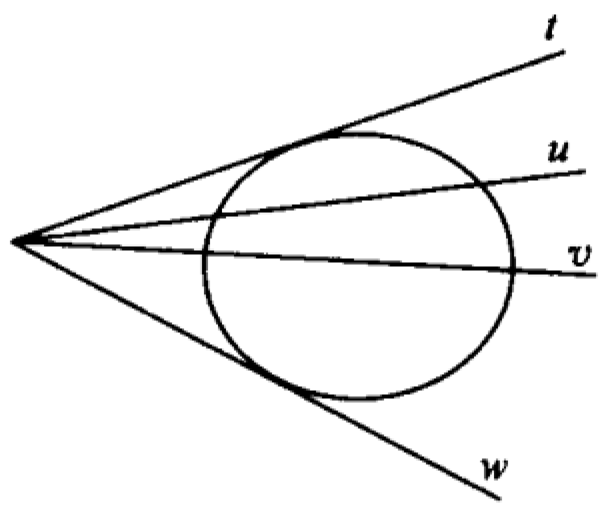


图 38.3

同样,若 u 及 v 是两直线(图38.3),考虑过此两直线交点到绝对形的切线 t 与 w(切线可以是虚线),则 u 及 v 的夹角定义为

$$\phi = c'\log(uv, tw),$$

其中 c' 是常量,括号中的量表示四直线的交比.

为解析地给出 d 和 ϕ 值的表达式,并证明它们与绝对形的选取有关,设绝对形的方程为如上所给的 F 与 G. 由定义

$$F_{xy} = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i y_j.$$

现能证明：若 $x = (x_1, x_2, x_3)$ 与 $y = (y_1, y_2, y_3)$ 为 P_1 与 P_2 的坐标，则

$$d = c \log \frac{F_{xy} + \sqrt{F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy}}}{F_{xy} - \sqrt{F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy}}}.$$

同样，若 (u_1, u_2, u_3) 与 (v_1, v_2, v_3) 为两直线的坐标，则用 G 能证明

$$\phi = c' \log \frac{G_{uv} + \sqrt{G_{uv}^2 - G_{uu}G_{vv}}}{G_{uv} - \sqrt{G_{uv}^2 - G_{uu}G_{vv}}}.$$

常量 c' 一般取为 $i/2$，使得 ϕ 是实的，且全中心角是 2π.

Klein 应用角与距离的上述对数表达式，并证明如何能从射影几何导出度量几何来. 于是若从射影几何开始，则选取绝对形并应用以上距离与角的表达式，便能得到 Euclid 的、双曲的和椭圆的几何作为其特例. 度量几何的性质则由绝对形的选择而固定. 附带地说一下，Klein 的距离和角度表达式能够证明等于 Cayley 的表达式.

若作射影平面到它本身的射影变换（即线性变换），它把绝对形变到本身（虽然绝对形的点变到其他点），则因为在线性变换下交比是不变的，距离和角度将不改变. 使绝对形不变的那些线性变换就是由绝对形所确定的特殊度量几何的刚体运动或者全等变换. 一般的射影变换不能使绝对形不变. 于是射影几何本身在它所允许的变换中是更为一般的.

Klein 对非 Euclid 几何的另一项贡献是这样的研究结果，即他观察到有两种椭圆几何，据他说这结果于 1871 年① 第一次得到，但发表于 1874 年②. 在二重椭圆几何中，两个点并不总是确定

① *Math. Ann.*, 4, 1871, 604. 也可参看 *Math. Ann.*, 6, 1873, 125; 及 *Math. Ann.*, 37, 1890, 554～557.

② *Math. Ann.*, 7, 1874, 549～557; 9, 1876, 476～482 = *Ges. Math. Abh.*, 2, 63～77.

唯一的直线.在球面模型中当两个点在直径相对两端时这是很明显的.第二种椭圆几何称为单重椭圆几何,在这种几何中两个点永远确定唯一的一条直线.从微分几何观点来看,正的常曲率曲面上微分型 ds^2(用齐坐标)是

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{\{1 + (a^2/4)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\}^2}.$$

在两种情况下都是 $a^2 > 0$.然而,在第一类中测地线是有限长度 $2\pi/a$ 的曲线,若半径为 R,则此有限长度为 $2\pi R$,并且是封闭的(回到它们自己).在第二种类型中,测地线长为 π/a 或 πR,并且仍然是封闭的.

有单重椭圆几何性质的一个曲面模型是 Klein 提出的①,这是个半球面,包括其边界.然而,边界上直径相对两端的任两点必须看作是一个点.在半球面上的大圆弧是"直线"或是这个几何的测地线,曲面上的普通角是这种几何的角.于是单重椭圆几何(有时称为椭圆几何,那时二重椭圆几何称为球面的几何)也可在正的常曲率空间实现.在这个模型中,至少在三维空间内我们不能把视为等同的这样两点实际连成一点.这种曲面将自交,并且曲面上重合于自交交点处的点将看作是不同的点.

现在我们能看出为什么 Klein 把 Lobatchevsky 几何称作是双曲的,把正的常曲率曲面上的 Riemann 几何称作是椭圆的,把 Euclid 几何称作是抛物的.这种名称来自下述事实:即普通双曲线与无穷远直线相交于两点,而相对应地在双曲几何中每一条直线交绝对形于两个实点.普通椭圆与无穷远直线没有实的公共点,同样在椭圆几何中每条直线与绝对形没有实的公共点.普通抛物线与无穷远直线只有一个实公共点,而在 Euclid 几何中(作为射影几何中的一种几何),每条直线与绝对形只有一个实的公共点.

① 参看脚注 p. 335 注①的参考文献.

从 Klein 的研究工作中逐渐出现的意义就是,射影几何在逻辑上实在是独立于 Euclid 几何的. 再者,非 Euclid 和 Euclid 几何也可看作射影几何的特例或子几何. 确实,射影几何公理化基础的纯逻辑的或严密的研究工作以及其与子几何的关系还有待后人去做(第 42 章). 但弄清楚了射影几何的基本地位之后,Klein 便铺平了公理化发展的道路,这就能从射影几何出发并由它推出几种度量几何.

4. 模型与相容性问题

早在 19 世纪 70 年代几种基本的非 Euclid 几何,如双曲几何与两种椭圆几何,已经为人引进并大力进行研究. 但为使这些几何成为数学的合法分支,还得回答一个基本问题,即它们是否相容. 如果有人证明在这些几何中矛盾是固有的,则仍可证明 Gauss, Lobatchevsky, Bolyai, Riemann 和 Klein 等人的工作将是毫无意义的.

说实在的,二维二重椭圆几何相容性的证明是现成有的,可能 Riemann 已经认识到这个事实,虽然他没有明确说出. Beltrami 曾经指出① Riemann 正的常曲率二维几何可在球面上实现. 这个模型使得二维二重椭圆几何相容性的证明成为可能. 这种几何的公理(此时尚未明确提出)与定理完全可以应用到球面上的几何,只要把二重椭圆几何的直线解释为球面上的大圆. 若在二重椭圆几何内有矛盾的定理,则在球面的几何内也必然有矛盾的定理. 现因球是 Euclid 几何的一部分,故若 Euclid 几何是相容的,则二重椭圆几何也必然如此. 对 19 世纪 70 年代的数学家来说,Euclid 几何的相容性几乎是没有问题的,因为除去如 Gauss, Bolyai, Lo-

---

① *Annali di Mat.*, (2), 2, 1863～1869, 232～255 = *Opere Matematiche*, 1, 406～429.

batchevsky 以及 Riemann 等几个人的观点外，Euclid 几何是物质世界必然的几何，而在物质世界上会有矛盾的性质那是不可能想像的. 然而，特别是根据后来的发展，重要的一点是认识到二重椭圆几何相容性的证明依赖于 Euclid 几何的相容性.

证明二重椭圆几何相容性的方法不能用于单重椭圆几何或用于双曲几何. 单重几何的半球面模型不能在三维 Euclid 几何中实现，虽然它能在四维 Euclid 几何中实现. 如果愿意相信后者的相容性，则可以接受单重椭圆几何的相容性. 然而，尽管 n 维几何已经由 Grassmann, Riemann 以及其他一些人考虑过，19 世纪 70 年代的任何数学家是否愿意肯定四维 Euclid 几何的相容性却是很值得怀疑的.

双曲几何的相容性是不能根据任何这种理由来建立的. Beltrami 曾给出过伪球面解释，伪球面是 Euclid 几何空间的一个曲面，但这只作为双曲几何有限区域的模型，所以不能用来建立全部几何的相容性. Lobatchevsky 与 Bolyai 曾考虑过这个问题(第 36 章第 8 节)，但未能解决它. 事实上，Bolyai 虽自豪地发表了他的非 Euclid 几何，但有证据他怀疑它的相容性，因为在他死后发现他的文章中还继续试图证明 Euclid 平行公理.

双曲几何与单重椭圆几何的相容性是用新的模型建立的. 双曲几何模型是 Beltrami① 给出的. 然而，用于这个模型的距离函数则归功于 Klein，并且经常有人认为这个模型也是他给出的. 我们来考虑二维情况.

在 Euclid 平面内(它是射影平面的一部分)选取一个实二次曲线，可取为圆(见图 38.4). 根据双曲几何的这种表示法，几何的点是圆的内点，几何的直线是圆的弦，比如说弦 XY(但不包含 X 与 Y). 若取任一点 Q 不在 XY 上，则能找到任何条数的直线通过

---

① *Annali di Mat.*, 7, 1866, 185 ~ 204 = *Opere Mat.*, 1, 262~280; *Gior. di Mat.*, 6, 1868, 284 ~ 312 = *Opere Mat.*, 1, 374~405.

Q 而不与 XY 相交. 这些直线的两条,如 QX 和 QY,把过 Q 的直线分成两类,一些直线与 XY 相交,一些直线则不与 XY 相交. 换言之,双曲几何的平行公理为圆内的直线(弦)与点所满足. 再者两直线 a 与 b 的夹角大小是

$$\angle(a,\ b) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\log(ab,\ mn),$$

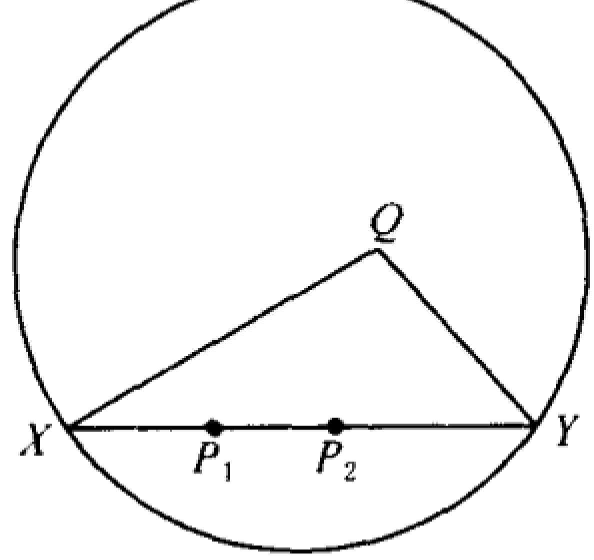


图 38.4

其中 m 与 n 是从角顶点到圆所作的共轭虚切线,$(ab,\ mn)$ 是 $a,\ b,\ m$ 与 n 四直线的交比. 常数 $1/2\mathrm{i}$ 保证直角的度量为 $\pi/2$. 两点间的距离由公式(8)定义,即 $d = c\log(PP',\ XY)$,c 一般取作 $k/2$. 根据这一公式,当 P 或 P' 趋于 X 或 Y 时,距离 PP' 变成无穷大,于是由于这种距离,弦是双曲几何的无限直线.

这样,以距离与角的大小的射影定义,圆内部的点、弦、角与其他图形就满足双曲几何的公理. 于是双曲几何的定理也可应用于圆内部的图形. 在这个模型中,双曲几何的公理和定理实际就是 Euclid 几何中对于一些特殊图形与概念(例如,由双曲几何方式定义的距离)的论断. 因为所说这些公理与定理能应用于当作属于 Euclid 几何的图形与概念,则所有双曲几何的论断都是 Euclid 几何的定理. 于是,如果在双曲几何中有矛盾的话,这个矛盾将是 Euclid 几何之内的矛盾;因而*如果 Euclid 几何是相容的*,则双曲几何也必须是相容的. 这样,双曲几何的相容性归结为 Euclid 几何的相容性.

双曲几何相容的事实蕴涵着 Euclid 平行公理与其他 Euclid 公理无关. 假若不然,即如果 Euclid 平行公理可以从其他公理导出,它也将是双曲几何的一个定理,因为除去平行公理以外,Euclid 几何的其他公理和双曲几何的公理是相同的. 但是这个定理

将与双曲几何的平行公理相矛盾,从而双曲几何将不会相容. 二维单重椭圆几何的相容性也像双曲几何一样可用同样方式证明,因为这种椭圆几何也可以在射影平面中实现,且有距离的射影定义.

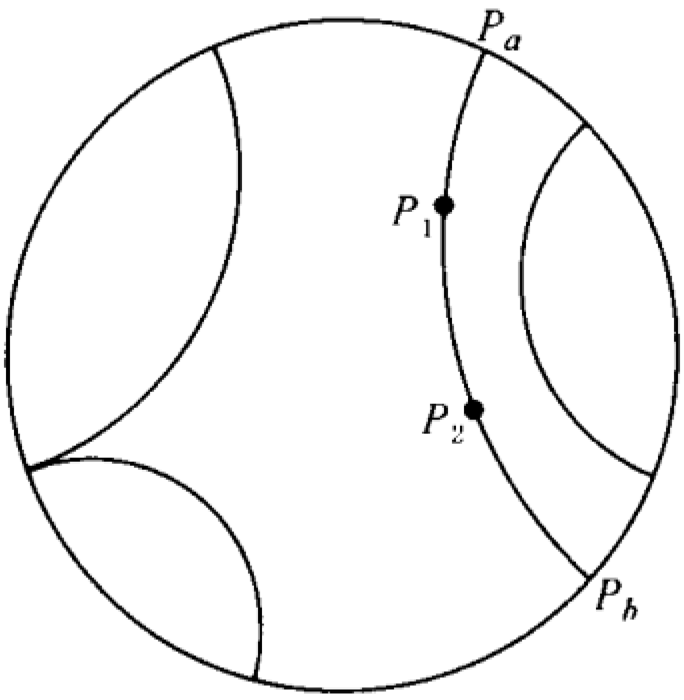


图 38.5

Poincaré① 联系自守函数的研究,独立地给出另外一个模型,也建立了双曲几何的相容性. 双曲平面几何的这个 Poincaré 模型能够表达的一种形式②是把圆取作绝对形(图 38.5). 在绝对形之中几何的直线是与绝对形成正交的圆弧和通过绝对形中心的直线. 任一线段 P_1P_2 的长度由 $\log(P_1P_2, P_aP_b)$ 给出,其中 $(P_1P_2, P_aP_b) = (P_1P_b/P_2P_b)(P_1P_a/P_2P_a)$, P_a 与 P_b 是过 P_1 与 P_2 的圆弧与绝对形的交点, P_1P_b, P_2P_b 等长度都是弦. 模型中两相交"直线"间的角就是两弧间的通常 Euclid 角. 在绝对形点处相切的圆弧是平行"直线". 因为在这个模型中双曲几何的公理和定理也是 Euclid 几何的特殊定理,以上关于 Beltrami 模型的论证,也可在此应用以建立双曲几何的相容性. 以上类似的高维模型也是正确的.

5. 从变换观点来看待几何

Klein 成功地把各种度量几何归纳为射影几何之后,使他寻求刻画各种几何的特征,不只是基于非度量的和度量的性质以及

---

① *Acta Math.*, 1,1882,1～62 = *Œuvres*, 2,108～168;参看论文 p. 8 及 p. 52.

② 属于 Poincaré 的这种形式是和 *Bull. Soc. Math. de France*, 15,1887,203～216 = *Œuvres*, 11,79～91 中给出的接近. 此处描述的模型似由 Joseph Wellstein (1869—1919)首先给出的,见 H. Weber 和 J. Wellstein, *Enzyklopädie der Elementar-Mathematik*, 2,1905,39～81.

各种度量间的区分，而是基于更广泛的观点，即基于这些几何与那些早已有的几何所要完成的目标是什么，来刻画它们的特征．他给出这种刻画是在 1872 年的一次演说："近代几何研究的比较评述"(Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen)①．这是他被接纳进入埃尔兰根大学教授会时的演讲，这次演说中所表达的观点后来以埃尔兰根纲领之称闻名于世．

Klein 的基本观点是，每种几何都由变换群所刻画，并且每种几何所要做的实际就是在这个变换群下考虑其不变量，再者一个几何的子几何是在原来变换群的子群下的一族不变量．在此定义下相应于给定变换群的几何的所有定理仍然是子群几何中的定理．

虽然 Klein 在他论文中没有用解析式子来陈述他所讨论的变换群，为了明显起见我们要用一些解析式子．根据他的几何概念，射影几何(比如说是二维的)是研究从一个平面上的点到另一个平面上的点或者到同一平面上的点(直射变换)的变换群下的不变量．每个变换形式为

$$
\begin{aligned}
x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,\\
x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,\\
x_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

其中设为齐次坐标，a_{ij} 是实数．系数行列式必须不为零．非齐次坐标的变换用下式表示：

$$
\begin{aligned}
x' &= \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}},\\
y' &= \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}}.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

同样 a_{ij} 的行列式必须不为零．射影变换群下的不变量，举例说有：

① *Math. Ann.*, 43, 1893, 63～100 = *Ges. Math. Abh.*, 1, 460～497. 英译文见于 *N. Y., Math. Soc. Bull.*, 2, 1893, 215～249.

线性、共线性、交比、调和集和保持为圆锥曲线不变等.

射影群的一个子群是一族仿射变换[①]. 这个子群定义如下:设在射影平面上固定任一直线 l_∞, l_∞ 上的点称为理想点或无穷远点, l_∞ 称为无穷远直线. 射影平面上其他点与直线称为寻常点,这些都是 Euclid 平面上通常的点. 直射变换仿射群是射影群的子群,使 l_∞ 不变(但该线上的点无需保持不变),仿射几何是在仿射变换下不变的那批性质与关系. 二维齐次坐标的仿射变换,其代数表示为以上的方程(9),但在其中 $a_{31}=a_{32}=0$,并有相同的行列式条件. 非齐次坐标的仿射变换表示为

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x+a_{12}y+a_{13}, \\ y' &= a_{21}x+a_{22}y+a_{23}, \end{aligned} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

在仿射变换下直线变到直线,平行直线变到平行线. 然而,长度与角的大小要改变. 仿射几何由 Euler 首先注意到而后由 Möbius 在其《重心坐标计算》一书中指出. 它在形变力学的研究中有用.

任何度量几何群,除了上面行列式的值必须是 +1 或 −1 外,和仿射群相同. 第一个度量几何是 Euclid 几何. 要定义这种几何群,我们从 l_∞ 开始,并假设在 l_∞ 上有固定的对合变换. 我们要求这个对合变换没有实的二重点,而以∞处的圆点作为(虚的)二重点. 现考虑所有那样的射影变换,它们不仅使 l_∞ 不变而且把对合的任何点变到对合的对应点,此即蕴涵每个虚圆点变到自身. Euclid 群的这些变换,代数地表达成非齐次(二维)坐标为

$$\begin{aligned} x' &= \rho(x\cos\theta - y\sin\theta + \alpha), \\ y' &= \rho(x\sin\theta + y\cos\theta + \beta), \end{aligned} \qquad \rho = \pm 1.$$

不变的是长度、角的大小、任何图形的大小与形状.

用这种分类法的术语来讲,Euclid 几何就是在这类变换下的一组不变量. 这类变换是:旋转、平移和反射. 要得到关于相似形的不变量,我们引进仿射群的子群,名为抛物度量群. 这个群定义为

---

① Klein 没有找出这个子群.

一族射影变换,它使得 l_∞ 上的对合不变,这就意味着每一对相应的点变到相应的另一对点. 非齐次坐标的抛物度量群的变换具有形式

$$x' = ax - by + c,$$
$$y' = bex + aey + d,$$

其中 $a^2 + b^2 \neq 0$,且 $e^2 = 1$. 这些变换保持角的大小不变.

要刻画双曲度量几何,我们再回到射影几何,在射影平面上考虑一个任意的、实的、非退化的二次曲线(绝对形). 射影群的子群使这个二次曲线不变的(但不必要求逐点不变)叫做双曲度量群,相应的几何叫做双曲度量几何. 其中的不变量是与迭合有关的那些量.

单重椭圆几何是一种几何,对应于射影变换的子群,使得射影平面上一个确定的虚椭圆(绝对形)不变. 椭圆几何平面是实射影平面,且其不变量是与迭合有关的那些量.

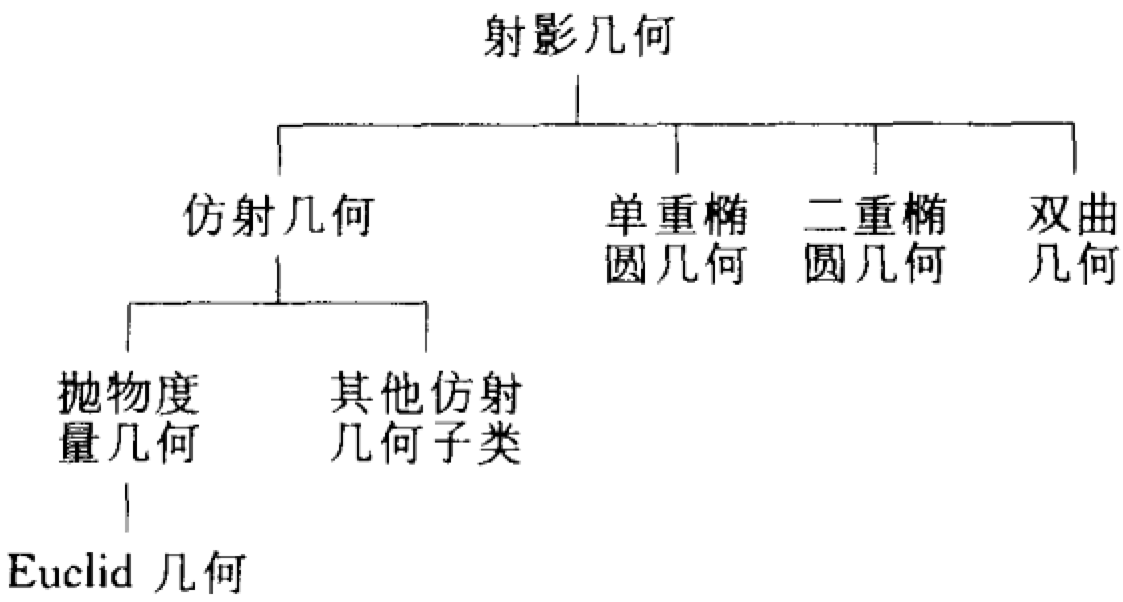
即使二重椭圆几何也能包括在这种变换观点之内,但我们必须从三维变换群出发来刻画二维的这种度量几何. 变换的子群由那些三维射影变换构成:它们把空间的有限部分的一个定球(曲面)S 变换到自身,球面 S 就是二重椭圆几何的"平面". 同样,不变量是与叠合有关的那些量.

在四种度量几何(即 Euclid 几何、双曲几何和两类椭圆几何)之中,相应子群中允许的变换就是通常说的刚体运动,而且只有这些几何允许刚体运动.

Klein 引进若干中间分类,我们将不在此重复,以下的表格表示主要几何间的关系.

Klein 又考虑了比射影几何更一般的几何. 这时(1872)代数几何作为独立的学科渐露头角,他引进三维的变换以刻画这种几何,用非齐次坐标写为

$$x' = \phi(x, y, z),\ y' = \psi(x, y, z),\ z' = \chi(x, y, z).$$



要求函数 ϕ, ψ 与 χ 是有理的与单值的,并能解出 x, y, z 作为 x', y', z' 的单值有理函数.这种变换称为 Cremona 变换,在其变换下的不变量是代数几何的主题(第 39 章).

Klein 也提出对一一对应连续变换下具有连续逆变换的不变量进行研究,这是现代叫做同胚的一类变换,在这类变换下不变量的研究是拓扑学的主题(第 50 章).虽然 Riemann 在他曲面的研究中也曾考虑过今日认为是拓扑学的问题,但提出把拓扑学作为一门重大的几何学科,这在 1872 年是一个大胆的步骤.

在 Klein 时代以后,对 Klein 的分类已经有了增加分类与进一步细分的可能,但不是所有的几何都能纳入 Klein 的分类方案之中.今日的代数几何和微分几何都不能置于 Klein 的方案之下①.虽然 Klein 的几何观点不能证明无所不包,但它确能给大部分的几何提供一个系统的分类方法,并提示很多可供研究的问题.他的几何"定义"指引了几何思想约有 50 年之久.再者,他强调变换下的不变性,这个观点已超出数学之外而带到力学和一般的数学物理中去了.变换下不变性的物理问题,或者物理定律的表达方式不依赖于坐标系的问题,在人们注意到 Maxwell 方程经 Lorentz 变换(仿射几何的四维子群)的不变性之后,在物理思想中都变得重要了.这种思想路线引向狭义相对论.

我们这里仅提一下几何分类的进一步研究,这些研究至少在

① 在微分几何的情形下,Klein 确曾谈及使 ds^2 表达式不变的变换群.这导致微分不变量(*Ges. Math. Abh.*, 1, 487).

Helmholtz 和 Sophus Lie(1842—1899)他们那个时代引起很大注意. 他们寻求刻画刚体运动可能的几何. Helmholtz 的基本论文《论几何的一些基础事实》①证明了,若在一个空间内刚体运动是可能的,则在常曲率空间内 ds 的 Riemann 表达式是唯一的可能. Lie 探讨了同一问题,使用叫做连续变换群的理论(这在他研究常微分方程时已引进),他刻画了各种空间,在其中刚体运动是可能的,用的是这些空间所能允许的各类变换群②.

6. 非 Euclid 几何的现实

在 Klein 和 Lie 的研究工作之后,对经典综合非 Euclid 几何和射影几何的兴趣衰退了. 部分是因为这些结构的要点被变换观点显露得十分清楚. 就为了寻找更多的定理而言,数学家感到矿藏已经枯竭. 基础的严密化尚有待完成,而这是在 1880 年后不久几年内一个活跃的领域(第 42 章).

对非 Euclid 几何失去兴趣的另外一个原因是它们似乎缺乏与物质世界的关联. 很奇怪的是这个领域的首创者们,Gauss,Lobatchevsky 和 Bolyai 确曾想到在天文学中随着研究工作的深入,可能证明非 Euclid 几何是可以应用的. 但是在后一时期工作的数学家们无人相信这些基本的非 Euclid 几何必然有物理意义. Cayley,Klein 和 Poincaré,虽然他们考虑过这事,但他们确信我们从不需要改进或放弃 Euclid 几何. Beltrami 的伪球面模型使得非 Euclid 几何在数学(虽不是物理的)意义下是真实的,因为它给 Lobatchevsky 几何以立即可以看出的一个解释,但需把尺子边缘换成测地线作为交换条件. 类似地,Beltrami-Klein 和 Poincaré 模

---

① *Nachrichten König. Ges. der Wiss. zu Gött.*, 15, 1868, 193 ~ 221 = *Wiss. Abh.*, 2, 618~639.

② *Theorie der Transformationsgruppen*, 3, 437~543, 1893.

型为了弄懂非 Euclid 几何,把直线的、距离的或者角的度量的概念或者三者一起,放在 Euclid 空间里来想象它们,但是在直线的通常解释下或者甚至在其他某种解释下,物质空间能够是非 Euclid 几何的思想是无人问津的. 事实上,大多数的数学家把非 Euclid 几何当作逻辑上的珍奇玩艺.

Cayley 是 Euclid 空间的坚定支持者,他只接受那种能用新的距离公式在 Euclid 空间实现的非 Euclid 几何. 1883 年他在不列颠科学进步协会的会长就职演说①中说道,非 Euclid 空间是一个先验性的错误思想,而非 Euclid 几何之所以能被人接受,那只是因为它们可以在 Euclid 空间中改变距离函数的结果而得出. 他不承认非 Euclid 几何的独立存在性,但认为它们是一类特殊的 Euclid 结构或者是 Euclid 几何中表示射影关系的一种方式. 他的观点是

> 按 Playfair 形式叙述的 Euclid 的第 12[第 10]公理,是不需要证明的,但它是我们空间概念的一部分,我们自己经验的物质空间的一部分,即为经验所熟知的空间,但它是所有外界经验作为其基础的那个表象.
>
> Riemann 的观点可以说成是:在理智之中有了更一般的空间概念(事实上是非 Euclid 空间的概念)之后,我们由经验知道,即使不是准确的,至少是高度近似的,空间(经验的物质空间)就是 Euclid 空间.

Klein 认为 Euclid 空间是必然的基本空间,其他的几何只是具有新的距离函数的 Euclid 几何. 非 Euclid 几何实际上是从属于 Euclid 几何的.

Poincaré 的判断更灵活些. 科学应该永远试用 Euclid 几何,

---

① *Collected Math. Papers*, 11,429～459.

并在必要处改变物理定律，Euclid 空间可能不真实，但它最方便. 一种几何并不能比另一种几何更真实些，只能是更方便些. 人创造几何，于是物理定律便与之适应，使得几何与定律拟合于世界. Poincaré 坚持说①，即使是要证明一个三角形的内角之和应大于 180°，我们最好仍假设 Euclid 几何能描述物质空间并且光线沿曲线前进，因为 Euclid 几何比较简单些. 自然，事实证明他是错的. 科学上认为重要的，不单独是在几何上简单，而是全部科学理论上的简单性. 显然 19 世纪的数学家在什么算是有物理意义的问题上，仍然束缚于他们的传统概念. 相对论的发现迫使对待非 Euclid 几何的态度有激烈的变化.

数学家的错觉以为他们当时所研究的工作是所能想象的最重要的课题，这种情况又可以他们对射影几何的态度作为例子. 我们在本章所考查的工作诚然证明射影几何是许多几何的基础. 然而，它显然不能包括有活力的 Riemann 几何和内容正在增长的代数几何. 然而 Cayley 在 1859 年他的论文中(第 3 节)确认"射影几何是所有的几何，反之亦然"②. Bertrand Russell 在他《几何基础论文集》(*An Essay on the Foundations of Geometry*, 1897)中，也相信射影几何必然是物质空间的任何几何的先验形式. Hermann Hankel，尽管他对历史的注意③，在 1869 年毫不犹豫地说，射影几何是走向所有数学的康庄大道. 已经记录的历史发展的考查清楚地证明数学家们很容易被他们的热情冲昏头脑.

---

① *Bull. Soc. Math. de France*, 15, 1887, 203～216 = *Œuvres*, 11, 79～91. 他又表达这个观点在论文"Les Géométries non-euclidiennes"中，见于 *Revue Générale des Sciences*, 2, 1891, #23. 英译文见 *Nature*, 45, 1892, 404～407. 又可参看他的 *Science and Hypothesis*, 第 3 章，见 *The Foundations of Science*, The Science Press, 1946.

② Cayley 用"画法几何"一词以代替射影几何.

③ *Die Entwicklung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten* (最近几世纪来数学的发展), 1869; 第二版, 1884.

参 考 书 目

Beltrami, Eugenio: *Opere matematiche*, Ulrico Hoepli, 1902, Vol. 1.

Bonola, Roberto: *Non-Euclidean Geometry*, Dover (reprint), 1955, pp. 129～264.

Coolidge, Julian L.: *A History of Geometrical Methods*, Dover (reprint), 1963, pp. 68～87.

Klein, Felix: *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Julius Springer, 1921～1923, Vols. 1 与 2.

Pasch, Moritz, and Max Dehn: *Vorlesungen über neuere Geometrie*, 2nd ed., Julius Springer, 1926, pp. 185～239.

Pierpont, James: "Non-Euclidean Geometry. A Retrospect", *Amer. Math. Soc. Bull.*, 36, 1930, 66～76.

Russell, Bertrand: *An Essay on the Foundations of Geometry* (1897), Dover (reprint), 1956.

第39章

代数几何

在这些日子里,拓扑这个天使和抽象代数这个魔鬼为各自占有每一块数学领域而斗争着.

Hermann Weyl

1. 背景

当非 Euclid 几何与 Riemann 几何正在创建的时候,射影几何学家忙于研究它们的主题.我们已经看到,这两领域由 Cayley 和 Klein 的工作而连接起来了.在代数方法广泛应用于射影几何以后,寻求几何图形有哪些性质与坐标表示无关,这个问题吸引了人们的注意力,并促成对代数不变量的研究.

几何图形射影性质就是图形在线性变换下不变的那些性质.当研究这些性质时,数学家们偶尔也考虑高次变换,并寻求在这些变换下曲线和曲面有哪些性质是不变的.数学家的兴趣不久就从线性变换转到这类变换上来,称它们为双有理变换,因为这些变换的代数表达式是坐标的有理函数,其逆变换也是坐标的有理函数.数学家之所以集中于研究双有理变换,无疑是由于这样的事实所造成:Riemann 曾用它们来研究 Abel 积分和 Abel 函数,并且事实上如我们以后要讲的,研究曲线的双有理变换的第一个大的步骤就是由 Riemann 的工作所引起的.这两个主题在19世纪的后半叶构成代数几何的内容.

代数几何一语是不适当的,因为原来它所指的是从 Fermat 与 Descartes 时代起所有把代数用于几何的研究工作;在19世纪

后半叶把代数不变量和双有理变换的研究称为代数几何，而到 20 世纪它指的是后一领域.

2. 代数不变量理论

我们已经指出，通过坐标表示来确定要表示的与要研究的图形的几何性质，需要识别在坐标变换下保持不变的那些代数表达式. 另外看到，用线性变换把一个图形变到另一个的射影变换保持图形的某些性质不变. 代数不变量代表这些不变的几何性质.

代数不变量的问题先前产生于数论(第 34 章第 5 节)，特别在研究二元二次型

(1) $$f = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

在 x 与 y 用线性变换 T 变换时是如何变换的，这里的 T 即

(2) $$x = \alpha x' + \beta y',\ y = \gamma x' + \delta y',$$

其中 $\alpha\delta - \beta\gamma = r$. 将 T 应用于 f 得出

(3) $$f' = a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2.$$

在数论中，$a,\ b,\ c,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma$ 诸量都是整数，且 $r = 1$. 然而，一般地说 f 的判别式 D 满足关系式

(4) $$D' = r^2 D$$

是正确的.

射影几何的线性变换更一般些，因为二次型和变换的系数不限于整数. 代数不变量一词用来把这更一般的线性变换下产生的不变量区别于数论中的模不变量，且就此而言，区别于 Riemann 几何的微分不变量.

讨论代数不变量的历史需要一些定义. 单变量的 n 次型

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$$

在齐次坐标中变成二元型

(5) $$f(x_1,\ x_2) = a_0x_1^n + a_1x_1^{n-1}x_2 + \cdots + a_nx_2^n.$$

三个变量的叫三元型;四个变量的叫四元型等等.下面定义适用于 n 个变量的型.

设二元型受到(2)式的变换 T. 在 T 下型 $f(x_1, x_2)$ 变换到型

$$F(X_1, X_2) = A_0X_1^n + A_1X_1^{n-1}X_2 + \cdots + A_nX_2^n.$$

F 的系数将与 f 的不同, $F=0$ 的根将与 $f=0$ 的根不同. f 的系数的任何函数 I 如果满足关系式

$$I(A_0, A_1, \cdots, A_n) = r^wI(a_0, a_1, \cdots, a_n),$$

就称为 f 的一个不变量. 若 $w=0$,此不变量称为 f 的绝对不变量. 不变量的次数是系数的次数且权数是 w. 二次型的判别式是一个不变量,如(4)所示. 这时次数是 2,权数是 2. 任一多项式方程 $f(x)=0$ 的判别式的意义在于,它等于零就是 $f(x)=0$ 有等根的条件,或者从几何上讲, $f(x)=0$ 的轨迹(这是一系列的点)有两个重合点. 这个性质显然与坐标系无关.

若两个(或多个)二元型

$$f_1 = a_0x_1^m + \cdots + a_mx_2^m,$$

$$f_2 = b_0x_1^n + \cdots + b_nx_2^n,$$

由 T 变换成

$$F_1 = A_0X_1^m + \cdots + A_mX_2^m,$$

$$F_2 = B_0X_1^n + \cdots + B_nX_2^n,$$

则系数的任何函数 I 如果满足关系式

$$(6)\qquad I(A_0, \cdots, A_m, B_0, \cdots, B_n) = r^wI(a_0, \cdots, a_m, b_0, \cdots, b_n),$$

就叫做两个型的联合不变量. 例如,线性型 $a_1x_1+b_1x_2$ 与 $a_2x_1+b_2x_2$ 以两式的结式 $a_1b_2-a_2b_1$ 作为联合不变量. 从几何上讲,结式等于零意味着两式表示相同的点(齐次坐标). 两个二次型

$$f_1 = a_1x_1^2 + 2b_1x_1x_2 + c_1x_2^2,$$

$$f_2 = a_2x_1^2 + 2b_2x_1x_2 + c_2x_2^2$$

有一个联合不变量

$$D_{12} = a_1c_2 - 2b_1b_2 + a_2c_1,$$

它的等于零表示 f_1 与 f_2 代表调和点偶.

除去单个型与一组型的不变量之外,还有协变量. f 的系数与变量的任何函数 C,若除去 T 的模数(行列式)的乘幂外是 T 下的不变量,则称它为 f 的协变量. 于是,二元型的一个协变量满足关系式

$$\begin{aligned} & C(A_0, A_1, \cdots, A_n, X_1, X_2) \\ & \quad = r^w C(a_0, a_1, \cdots, a_n, x_1, x_2). \end{aligned}$$

绝对协变量和联合协变量的定义与不变量的定义类似. 协变量中系数的次数叫做它的次数,而其变量的次数叫做它的阶数. 这样,不变量就是零阶的协变量. 然而,有时不变量一词用于狭义的不变量或协变量.

f 的一个协变量代表某一图形,它不仅相关于 f 而且射影相关于 f. 例如两个二元二次型 $f(x_1, x_2)$ 与 $\phi(x_1, x_2)$ 的 Jacobi 行列式,即

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \phi}{\partial x_2} \end{vmatrix}$$

是两个型的权为 1 的联合协变量. 从几何上讲,令 Jacobi 行列式等于零就代表一对点,它与原来 f 与 ϕ 所代表的每一对点都是调和的. 调和性质是射影性质.

Hesse 引进的 Hesse 行列式①

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}$$

是权 2 的协变量,它的几何意义过于复杂,这里限于篇幅,不详细介绍(参看第 35 章第 5 节). Hesse 行列式的概念和它的协变性适

---

① *Jour. für Math.*, 28,1844, 68 ~ 96 = *Ges. Abh.*, 89~122.

用于 n 元的任何型.

代数不变量的工作由 George Boole(1815—1864)开始于 1841 年,他的结果①是有局限性的.更值得一提的是 Cayley,他为 Boole 的工作所吸引而研究这个问题,并使 Sylvester 也对此感兴趣.和他们一起作这研究的还有 George Salmon(1819—1904),他是 1840—1866 年都柏林三一学院的数学教授,后来成为该校的神学教授.这三人在不变量方面作了如此多的工作,以至 Hermite 在一封信中称他们为不变量三位一体.

1841 年 Cayley 开始发表射影几何在代数方面的数学文章. Boole 1841 年的文章提示给 Cayley 以 n 次齐次函数的不变量的计算法.他称这些不变量为导数,后又称为超行列式;不变量这个名词来自 Sylvester②. Cayley 利用 Hesse 和 Eisenstein 的行列式思想,建立了得出他"导数"的一套技巧.后来从 1854—1878 年在《哲学汇刊》上发表了 10 篇关于代数形式的论文③.代数形式是他用来称 2 个、3 个或多个变量的齐次多项式的名词. Cayley 对不变量的兴趣如此之大,以至使他竟然为不变量而研究不变量.他也发明了一种处理不变量的符号方法.

就二元四次型特例

$$f = ax_1^4 + 4bx_1^3x_2 + 6cx_1^2x_2^2 + 4dx_1x_2^3 + ex_2^4$$

说,Cayley 证明 Hesse 行列式 H 同 f 与 H 的 Jacobi 行列式都是协变量,并证明

$$g_2 = ae - 4bd + 3c^2$$

和

$$g_3 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix}$$

① *Cambridge Mathematical Journal*, 3, 1841, 1～20 与 3, 1842, 106～119.

② *Coll. Math. Papers*, Ⅰ, 273.

③ *Coll. Math. Papers*, 2, 4, 6, 7, 10.

都是不变量.对这些结果,Sylvester 和 Salmon 又增加了许多.

另一有贡献的人是 Ferdinand Eisenstein,他更关心的是数论,他早就发现二元三次型①

$$f = ax_1^3 + 3bx_1^2x_2 + 3cx_1x_2^2 + dx_2^3$$

的最简单的二次协变量是它的 Hesse 行列式 H,最简单的不变量是

$$3b^2c^2 + 6abcd - 4b^3d - 4ac^3 - a^2d^2,$$

它是二次 Hesse 行列式,也是 f 的判别式.又 f 和 H 的 Jacobi 行列式是阶数为 3 的另一协变量.后来,Siegfried Heinrich Aronhold(1819—1884)在 1849 年开始研究不变量,写过关于三元三次型不变量的文章②.

不变量理论奠基者所碰到的第一个较大的问题是特殊不变量的发现.这大约是从 1840 到 1870 年的工作方向.我们知道,这类函数能够构造出好多来,因为有些不变量如 Jacobi 行列式与 Hesse 行列式本身也是具有不变量的型,并且因为一些不变量与原来型合在一起成为新的一组型,它们就会有联合不变量.几十个大数学家(包括已经提到过的那几个人),计算过特殊的不变量.

不变量的不断计算引导到不变量理论的较大问题,这是在求得许多特别的或特殊的不变量后引起的;这就是求不变量的完备系.这就意味着对已给数目的变量和次数的一个型,求其最小可能个数的有理整不变量与协变量,使得任何其他的有理整不变量或协变量可以表成这个完备集合的具数值系数的有理整函数.Cayley 证明,Eisenstein 对二元三次式和他自己对二元四次式所求得的不变量与协变量,分别是两种情况下的完备系③.对其他种型的完备系的问题尚待解决.

---

① *Jour. für Math.*, 27,1844,89～106,319～321.

② *Jour. für Math.*, 55,1858,97～191 和 62,1863,281～345.

③ *Phil. Trans.*, 146,1856, 101 ～ 126 = *Coll. Math. Papers*, 2,250～275.

任何给定次数的二元型的基或有限完备系的存在性，首先由 Paul Gordan(1837—1912)证明，他的大半生都致力于这个问题.他的结果[①]是：每个二元型 $f(x_1, x_2)$ 都具有一个以有理整不变量与协变量所组成的有限完备系. Gordan 用了 Clebsch 的定理，故所得结果名为 Clebsch-Gordan 定理. 它的证明冗长而繁难. Gordan 还证明了[②]二元型的任何有限组有不变量和协变量的一个有限完备系. Gordan 的证明给出如何计算完备系.

在嗣后 20 年间 Gordan 的结果得到各种有限的推广. Gordan 自己给出三元二次型[③]、三元三次型[④]，以及一组(含两个或三个)三元二次型[⑤]的完备系. 对于特殊的三元四次型 $x_1^3x_2+x_2^3x_3+x_3^3x_1$，Gordan 给出了 54 种基本型的完备系[⑥].

在 1886 年 Franz Mertens(1840—1927)[⑦]用归纳法再次证明二元型组的 Gordan 定理. 他假设对任一已知二元型组，定理为真，然后证明当组中有一个型的次数增加 1 时定理必然仍是真的. 他没有明显给出独立不变量和协变量的有限集合，但他证明这个集合是存在的. 最简单的情况是一个线性型，是归纳法的起点，这种型只有本身乘幂作为它的协变量.

Hilbert 在 1885 年完成不变量的博士论文[⑧]后，在 1888 年[⑨]又再次证明 Gordan 的定理，即任何已给二元型组都有不变量与协变量的一个有限完备系. 他的证明是 Mertens 证明的修正. 两个证明都比 Gordan 的简单得多. 但 Hilbert 的证明也没有给出求完备系的步骤.

---

① *Jour. für Math.*, 69, 1868, 323～354.
② *Math. Ann.*, 2, 1870, 227～280.
③ R. Clebsch 与 F. Lindemann, *Vorlesungen über Geometrie*, I, 1876, p. 291.
④ *Math. Ann.*, 1, 1869, 56～89, 90～128.
⑤ Clebsch-Lindemann, p. 288.
⑥ *Math. Ann.*, 17, 1880, 217～233.
⑦ *Jour. für Math.*, 100, 1887, 223～230.
⑧ *Math. Ann.*, 30, 1887, 15～29 = *Ges. Abh.*, 2, 102～116.
⑨ *Math. Ann.*, 33, 1889, 223～226 = *Ges. Abh.*, 2, 162～164.

在1888年Hilbert宣称能用一个完全新的途径来证明如下的问题而引起数学界的惊奇:次数与变量个数为已给的任何型以及任意多个变量的已给型系,都有独立的有理整不变量与协变量的一个有限完备系①.新途径的基本思想是暂时忘掉不变量而考虑这样的问题:若有限多个变量的有理整式的一个无穷系为已给,问在什么条件下存在有限多个这样的表达式,即一组基,使所有其他的表达式都可表成这组基的线性组合,组合的系数是原有变量的有理整函数.回答是总存在.更明确地说,Hilbert在不变量的结果之前得出的基的定理可叙述如下:代数型就是n个变量的有理齐次整函数,系数在某确定的有理域内(域).给定了n个变量的任何次的无穷多个型的集合,则存在有限多个(基)F_1, F_2, …, F_m,使得集合中任一型F都可写成

$$F = A_1F_1 + A_2F_2 + \cdots + A_mF_m,$$

其中A_1, A_2, …, A_n是n个变量(不一定在无穷系中)的适当的型,其系数与无穷系的系数都在同一域内.

应用这个定理于不变量与协变量,Hilbert的结果是:对于任何一个型或一组型,都存在有限多个有理整不变量与协变量,使得每个其他的有理整不变量与协变量都可表示成这有限集合中不变量或协变量的线性组合.不变量与协变量的这个有限集合是不变量的完备系.

Hilbert的存在性证明比Gordan的基的繁难计算要简单得多,Gordan不由得吭声道:“这不是数学;是神学.”然而在他重新考虑这个问题后说:“我终于相信神学也有其优点.”事实上,他自己简化了Hilbert的存在性证明②.

在19世纪80年代和90年代不变量理论看来已统一了数学

① *Math. Ann.*, 36,1890, 473～534 = *Ges. Abh.*, 2,199～257和直到1893年后发表的论文.

② *Nachrichten König. Ges. der Wiss. zu Gött.*, 1899,240～242.

的很多领域. 这个理论是那个时代的"近世代数". Sylvester 在 1864 年说①:"正如俗语说,条条大道通罗马,所以至少就我自己情况说,代数上的所有研究迟早都要归宿到近世代数的大厦,在其闪闪发光的大门口铭刻着不变量论这几个字."不久这个理论本身成为研究的目标,而与其来自数论和射影几何的情况无关了. 代数不变量的研究者坚持要证明每种类型的代数恒等式,而不管其有无几何意义. Maxwell 当年在剑桥求学时说过,那里有些人总是用 quintics 与 quantics(五次型与代数型)来看整个宇宙的.

另一方面,19 世纪后半叶的物理学家并不注意这个问题. 实际上 Tait 有一次提到 Cayley 说:"这样一个杰出的人物把他的才能放在这种完全无用的问题上岂不是遗憾的事吗?"然而这个课题确实直接地或间接地,主要通过微分不变量对物理学产生影响.

尽管在 19 世纪后半叶有很多热心研究不变量理论的人,但就当时对这门学问所怀抱的希望和所追求的目标来说,它已失去其吸引力. 数学家说 Hilbert 扼杀了不变量的研究,因为他已处理了所有的问题. Hilbert 确曾在 1893 年写信给 Minkowski 说他不愿再研究这个问题了,又在 1893 年的一篇论文中说,这个理论的最重要的总目标已经达到. 然而事实远非如此. Hilbert 的定理没有证明如何计算给定的任何一个或一组型的不变量,因而不能提供个别重要的不变量. 探索有几何意义的或有物理意义的特殊不变量仍是很重要的事,甚至对已知次数和已知变量个数的型来作基的计算也可能是一项有价值的工作.

"扼杀"这个 19 世纪意义下不变量理论的,也正是扼杀过许多一度为人所过分热情地追求的其他活动的种种普通因素. 数学家是跟着带头人走的. Hilbert 的宣告和他自己放弃这个主题的研究这一事实,对其他人产生很大影响. 还有,在许多易于立即得出的

---

① *Phil. Trans.*, 154, 1864, 579 ~ 666 = *Coll. Math. Papers.* 2, 376~479, p. 380.

结果弄到手之后,重要特殊不变量的计算就变得更加困难了.

不变量的计算并没有随着 Hilbert 的工作而告结束. Emmy Noether(1882—1935), Gordan 的学生,1907 年完成博士论文《三元双二次型的不变量完备系》①. 她还给出三元四次型的协变量型的一个完备系,共 331 个. 1910 年她把 Gordan 的结果推广到 n 个变量②.

代数不变量论以后的历史属于近世抽象代数. Hilbert 的一套方法把模、环和域的抽象理论带到显著地位. 用这种语言 Hilbert 证明了每个模系(n 个变量的多项式类中的一个理想)都有由有限个多项式组成的一个基,或者 n 个变量的多项式域中每个理想都有一个有限基,如若多项式系数域中每个理想都有一个有限基的话. 从 1911 到 1919 年 Emmy Noether 用 Hilbert 的方法和她自己的方法对不同情况的有限基写出许多论文. 在后来 20 世纪的发展中,抽象代数观点占了主导地位. 如 Eduard Study 在他的不变量论的教科书中抱怨说,人们只追求抽象方法而缺乏对特殊问题的关心.

3. 双有理变换概念

在第 35 章我们看到,主要是在 19 世纪 30 年代与 40 年代之间,射影几何的研究工作转向高次曲线. 然而,在这个工作进行得还不甚深入以前,研究的性质有了改变. 射影观点就是齐次坐标线性变换的观点. 二次与高次的变换逐渐起作用,重点转向双有理变换. 在两个非齐次坐标的情形,这个变换具有形式

$$x' = \phi(x, y),\ y' = \psi(x, y),$$

其中 ϕ 与 ψ 是 x, y 的有理函数,并且 x, y 可表为 x' 与 y' 的有理

① *Jour. für Math.*, 134,1908,23~90.

② *Jour. für Math.*, 139,1911,118~154.

函数. 齐次坐标 x_1, x_2 与 x_3 的变换式为

$$x_i' = F_i(x_1, x_2, x_3),\ i = 1, 2, 3,$$

其逆变换为

$$x_i = G_i(x_1', x_2', x_3'),\ i = 1, 2, 3,$$

其中 F_i 及 G_i 是各自变量的 n 次齐次多项式. 除了有限多个点可能各对应于一条曲线之外,对应是一对一的.

关于圆的反演,可以作为双有理变换的例子. 从几何上讲,这个变换(图 39.1)把 M 变到 M',或把 M' 变到 M,定义它的方程是

$$OM \cdot OM' = r^2,$$

其中 r 是圆的半径. 从代数上讲,若在 O 点建立一个坐标系,则由 Pythagoras 定理导出

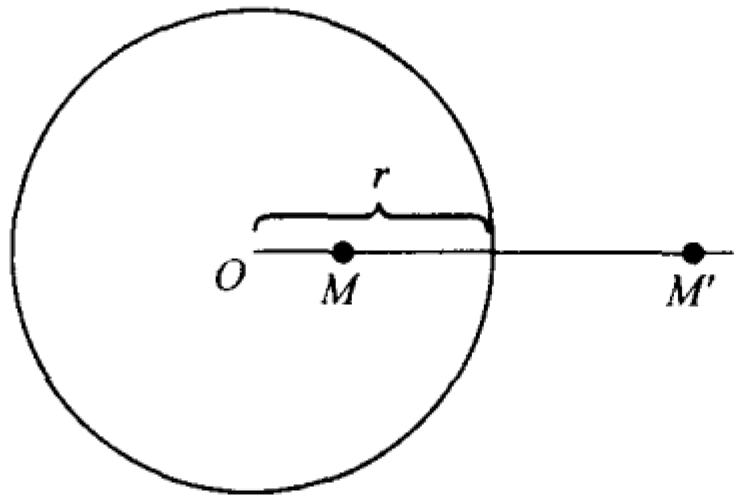


图 39.1

$$x' = \frac{r^2 x}{x^2 + y^2},\ y' = \frac{r^2 y}{x^2 + y^2}, \tag{7}$$

其中 M 是 (x, y),M' 是 (x', y'). 在这个变换下圆变到圆或变到直线,并且可以反过来变. 反演是把全平面变到自身的变换,这样的双有理变换称为 Cremona 变换. 三个(齐次)变量的 Cremona 变换的例子是二次变换

$$x_1' = x_2 x_3,\ x_2' = x_3 x_1,\ x_3' = x_1 x_2, \tag{8}$$

其逆是 $\quad x_1 = x_2' x_3',\ x_2 = x_3' x_1',\ x_3 = x_1' x_2'.$

双有理变换这个术语也用于更广泛的意义,即把一曲线上的点变到另一曲线上的点的变换是双有理的,但在全平面的变换不必是双有理的. 例如:(非齐次坐标)变换

$$X = x^2,\ Y = y \tag{9}$$

在全平面不是一对一的,但是确实把 y 轴右边的任一曲线 C 以一对一的对应方式变到另一曲线.

反演变换是出现的第一个双有理变换. 在一定情况下 Poncelet 在他 1822 年的《论图形的射影性质》中曾用过它,尔后又被 Plücker, Steiner, Quetelet 和 Ludwig Immanuel Magnus(1790—1861)等人用过. 它曾为 Möbius① 详尽地研究过,其在物理上的应用为 Lord Kelvin② 及 Liouville 所认识③,后者把它称之为半径互为倒数的变换.

在意大利几个大学当数学教授的 Luigi Cremona(1830—1903),在 1854 年引进一般的双有理变换(把全平面变到自身)并写过多篇有关的重要论文④. Max Noether(1844—1921)(Emmy Noether 的父亲),证明了这样一个基本结果⑤:一个平面 Cremona 变换可由一系列二次的及线性的变换构成. Jacob Rosanes(1842—1922)独立地发现这个结果⑥,还证明了所有平面上的一对一的代数变换必然是 Cremona 变换. Noether 和 Rosanes 的证明由 Guido Castelnuovo(1865—1952)⑦ 加以完善.

4. 代数几何的函数-理论法

虽然双有理变换的本质是清楚的,但作为在这种变换下不变量研究的代数几何,其进展至少在 19 世纪是不能令人满意的. 几种处理方法用过了;所获得的结果是不相联系的和零碎的;大多数证明是不完全的;并且很少获得重要定理. 处理方法的多样性造成用语的显著差异. 主题的目标也是模糊的. 虽然双有理变换下的不

---

① *Theorie der Kreisverwandschaft*(反演论), *Abh. König. Säch. Ges. der Wiss.*, 2,1855, 529 ~ 565 = *Werke*, 2,243~345.

② *Jour. de Math.*, 10,1845,364~367.

③ *Jour. de Math.*, 12,1847,265~290.

④ *Gior. di Mat.*, 1,1863, 305 ~ 311 = *Opere*, 1,54~61;又 3,1865,269~280, 363 ~ 376 = *Opere*, 2,193~218.

⑤ *Math. Ann.*, 3,1871,165~227,特别是 p. 167.

⑥ *Jour. für Math.*, 73,1871,97~110.

⑦ *Atti Accad. Torino*, 36,1901,861~874.

变性曾是主导课题，但内容包括对曲线、曲面以及高维结构的性质的研究. 由于这些因素，没有出现很多中心结果. 我们给出所得结果的几个样本.

第一种处理方法是 Clebsch 创立的. (Rudolf Friedrich) Alfred Clebsch(1833—1872)从 1850—1854 年在哥尼斯堡跟 Hesse 研究. 他早期工作的兴趣在数学物理方面，从 1858 到 1863 年在 Karlsruhe 任理论力学教授，后又在 Giessin 和格丁根任数学教授. 他研究了 Jacobi 变分法中留下的问题和微分方程理论. 1862 年他出版《弹性学教程》(*Lehrbuch der Elasticität*). 然而他的主要工作是代数不变量和代数几何.

到 1860 年左右为止，Clebsch 研究三次和四次曲线和曲面的射影性质. 他在 1863 年遇到 Paul Gordan 并获悉 Riemann 在复变函数论方面的工作. Clebsch 于是把这个理论用到曲线的理论上去①. 这种方法叫做超越法. 虽然 Clebsch 使复变函数与代数曲线发生联系，但他在给 Gustav Roch 的一封信中承认他不能理解 Riemann在 Abel 函数方面的工作，也不懂 Roch 学位论文中的论著.

Clebsch 用以下方式重新解释复变函数论：函数 $f(w, z) = 0$，其中 z 和 w 是复变量，在几何上相应于 z 的一个 Riemann 曲面与一个 w 平面或其一部分，或者也可以说是：相应于这样的一个 Riemann 曲面，它上面每个点附有 z 和 w 的一对数值. 若只考虑 z 和 w 的实部，方程 $f(w, z) = 0$ 便表示实 Descartes 坐标平面的一条曲线. z 与 w 仍可有满足 $f(w, z) = 0$ 的复数值，但不能画图. 实曲线具有复数点这一观点在射影几何的工作中已经熟知. 平面曲线的双有理变换论对应于曲面的双有理变换论. 在上述的新解释下，Riemann 曲面的支点对应于曲线上那样的点，那里一条直线 $x =$ 常量与曲线相交于两个或多个相合的点，即它或者与曲

① *Jour. für Math.*, 63,1864,189～243.

线相切,或者过一个尖点.曲线上的二重点相当于曲面上那样的点,在那里两叶曲面恰好相切而无其他相接点.曲线上高阶重点也相当于 Riemann 曲面的其他奇点.

在以后的叙述中将采用下面的定义(参看第 23 章第 3 节):n 次平面曲线的 $k>1$ 阶重点(奇点)P 是这样一个点,通过 P 的普通直线与曲线相交于 $n-k$ 个点.若在 P 点的 k 条切线是相异的,这个重点是寻常点.在计算一个 n 次曲线与 m 次曲线的交点数目时,每条曲线上重点的重数必须计算在内.若交点 P 在曲线 C^n 上是 h 重的,而在 C^m 上是 k 重的,且在 P 点 C^n 的切线与 C^m 的切线不相同,则交点的重数是 hk.一曲线 C' 称为伴随于曲线 C,若 C 的重点都是寻常点或尖点,且若 C 的每个 k 阶重点是 C' 的一个 $k-1$ 阶重点.

Clebsch① 是第一个用曲线术语来重新叙述第一类 Abel 积分定理(第 27 章第 7 节)的人.Abel 考虑一个固定的有理函数 $R(x,\ y)$,其中 x 与 y 由任一代数曲线 $f(x,\ y)=0$ 关联着,使得 y 是 x 的函数.设(图 39.2) $f=0$ 为另一代数曲线

$$\phi(x,\ y,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k)=0$$

所截,其中 a_i 是 $\phi=0$ 中的系数.设 $\phi=0$ 与 $f=0$ 的交点是$(x_1,\ y_1)$,$(x_2,\ y_2)$,$\cdots$,$(x_m,\ y_m)$.(这些点的个数 m 是 f 与 ϕ 的次数的乘积.)已知 $f=0$ 上一点$(x_0,\ y_0)$,其中 y_0 属于 $f=0$ 的一个分支,则可考虑和式

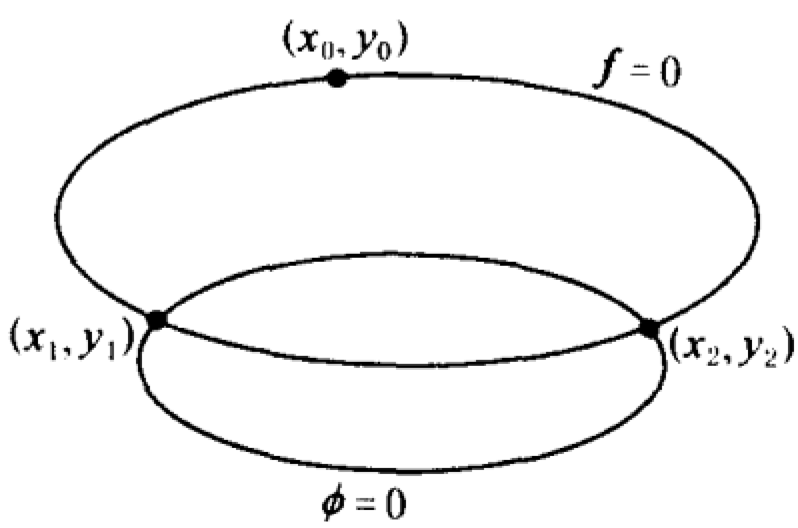


图 39.2

$$I=\sum_{i=1}^{m}\int_{x_0,\ y_0}^{x_i,\ y_i}R(x,\ y)\mathrm{d}x.$$

上限 x_i,y_i 全都在 $\phi=0$ 上,而积分 I 是上限的函数.于是,这些上

① *Jour. für Math.*, 63,1864,189~243.

限有一个特征数 p，它应是其余上限的代数函数，数 p 只与 f 有关. 再者，I 能够表示成这 p 个积分与 x_i，$y_i(i=1, 2, \cdots, m)$ 的有理函数与对数函数之和. 又，若曲线 $\phi=0$ 随参量由 a_1 变到 a_k 而改变，则 x_i 也将变化，于是 I 通过 x_i 成为 a_i 的函数. a_i 的函数 I 将是 a_i 的有理函数，或者在最坏的情况下也只包括 a_i 的对数函数.

Clebsch 也把 Riemann 关于 Riemann 曲面上 Abel 积分(即形如 $\int g(x, y)\mathrm{d}x$ 的积分，其中 g 是有理函数且 $f(x, y)=0$) 的概念用到曲线上. 为说明第一类积分，考虑一个无重点的四次平面曲线 C_4. 这里 $p=3$ 且有三个处处有限的积分

$$u_1=\int\frac{x\mathrm{d}x}{f_y},\ u_2=\int\frac{y\mathrm{d}x}{f_y},\ u_3=\int\frac{\mathrm{d}x}{f_y}.$$

适用于 C_4 的也可适用于 n 次任意代数曲线 $f(x, y)=0$. 那时有 p 个积分代替三个处处有限的积分(其中 p 是 $f=0$ 的亏格)，每个积分有 $2p$ 个周期模数(第 27 章第 8 节). 积分具有形式

$$\int\frac{\phi(x, y)}{\partial f/\partial y}\mathrm{d}x,$$

其中 ϕ 是一个(伴随的)多项式，恰为 $n-3$ 次，且在 $f=0$ 的重点处与尖点处为零.

Clebsch 的次一贡献[①]是引进亏格的思想作为对曲线进行分类的概念. 若曲线有 d 个二重点，则亏格 $p=(1/2)(n-1)(n-2)-d$. 以前有曲线的亏数概念(第 23 章第 3 节)，即 n 次曲线可能有的二重点最多个数 $(n-1)(n-2)/2$ 减去确实有的二重点数. Clebsch 证明[②]：只具有寻常重点(切线全不相同)的曲线，亏格(genus)与亏数(deficiency)相等，且亏格在把平面变到自己的双

① *Jour. für Math.*, 64, 1865, 43～65.

② *Jour. für Math.*, 64, 1865, 98～100.

有理变换下是一个不变量①. Clebsch 亏格的概念是与 Riemann 对 Riemann 曲面的连通数相关联的. 与亏格为 p 的曲线对应的 Riemann 曲面具有连通数 $2p+1$.

亏格的概念可以用来建立曲线的重要定理. Jacob Lüroth (1844—1910)证明了②亏格为 0 的曲线可用双有理变换变到一条直线. Clebsch 证明了一条亏格为 1 的曲线可用双有理变换变到三次曲线.

除去用亏格分类曲线外,Clebsch 还仿照 Riemann 的办法在每个亏格中引进类别. Riemann 考虑过③他的曲面的双有理变换,例如,若 $f(w, z)=0$ 是曲面的方程,并设

$$w_1=R_1(w, z),\ z_1=R_2(w, z)$$

是有理函数,且逆变换是有理函数,则 $f(w, z)$可以变换成 $F(w_1, z_1)=0$. 两个代数方程 $F(w, z)=0$(或它们的曲面)仅当它们有相同的 p 值时才可以彼此双有理变换.(曲面的页数不一定保持不变.)Riemann 不要求进一步的证明,它是由直观保证的.

Riemann(在 1857 年的论文中)认为所有能彼此双有理变换的方程(或曲面)属于同一类. 它们有相同的亏格 p. 然而,不同的类别可具有相同的 p 值(因为歧点可以不同). 亏格为 p 的最普遍的类,当 $p>0$ 时用 $3p-3$ 个(复数)常数(方程中的系数)去刻画,当 $p=1$ 时用一个常数,当 $p=0$ 时用零个常数去刻画. 在椭圆函数情况下, $p=1$, 于是有一个常量. 对于三角函数, $p=0$, 故没有任何任意常量. Riemann 把常量的个数叫做类模数. 常量在双有理变换下是不变量. Clebsch 同样把从一个曲线用一一对应的双有理变换导出的所有曲线放在一类. 在同一类的曲线必然有相同的亏格,但是也可以有不同的类具有相同的亏格.

---

① 若重(奇)点是 r_i 阶的,则曲线 C 的亏格 p 是 $(n-1)(n-2)/2-(1/2)\sum r_i(r_i-1)$, 其中和式遍历所有重点. 亏格是更细致的概念.

② *Math. Ann.*, 9,1876,163～165.

③ *Jour. für Math.*, 54,1857, 115 ～ 155 = *Werke*, 2nd ed., 88～142.

5. 单值化问题

后来 Clebsch 把注意力转向所谓曲线的单值化问题. 首先说明这个问题的含义. 已给方程

(10) $$w^2 + z^2 = 1,$$

把它表成参量形式

(11) $$z = \sin t,\ w = \cos t,$$

或参量形式

(12) $$z = \frac{2t}{1+t^2},\ w = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

这样,即使(10)定义 w 为 z 的多值函数,我们也能把 z 和 w 都表示成 t 的单值函数. 称参量方程(11)或(12)把代数方程(10)单值化.

对亏格 0 的方程 $f(w, z) = 0$, Clebsch① 证明每个变量能够表示成单个参量的有理函数. 这些有理函数都是单值化函数. 当 $f = 0$ 解释为一条曲线时,则称它为**有理**曲线. 反之,若 $f = 0$ 的变量 w 与 z 能够用一个任意参量有理表出,则 $f = 0$ 的亏格为 0.

Clebsch 在同一年②证明当 $p = 1$ 时 w 与 z 能够表示成参量 ξ 与 η 的有理函数,其中 η^2 是 ξ 的三次或四次多项式. 于是 $f(w, z) = 0$,或相应的曲线,称为双有理的,这是 Cayley 所引进的名词③. 它也叫做椭圆的,因为方程 $(dw/dz)^2 = \eta^2$ 导致椭圆积分. 我们也说 w 与 z 可表示成为单参量 α 的双周期单值函数,或者表示成为 $\wp(\alpha)$ 的有理函数,这里 $\wp(\alpha)$ 是 Weierstrass 函数. Clebsch 用一个参量的椭圆函数把亏格 1 的曲线单值化,这一成果使他有可能证

---

① *Jour. für Math.*, 64, 1865, 43～65.

② *Jour. für Math.*, 64, 1865, 210～270.

③ *Proc. Lon. Math. Soc.*, 4, 1871～1873, 347～352 = *Coll. Math. Papers*, 8, 181～187.

明这些曲线有关拐点、密切锥、从一点到曲线的切线等值得注意的性质，其中有些性质虽早有证明但却极其困难.

对于亏格为 2 的方程 $f(w, z) = 0$，Alexander von Brill (1842—1935)证明了[①]变量 w 与 z 能够表示为 ξ 与 η 的有理函数，其中 η^2 现为 ξ 的五次或六次多项式.

这样，亏格为 0，1，2 的函数能够单值化. 对亏格大于 2 的函数 $f(w, z) = 0$，当时的想法是用更一般的函数，即自守函数. 在 1882 年 Klein[②] 给出一个普遍的单值化定理，但其证明是不完全的. 在 1883 年 Poincaré 发表了他的一般单值化定理[③]，但他也没有完全的证明. Klein 与 Poincaré 两人继续努力证明这个定理，但在 25 年间没有决定性的成果. 在 1907 年 Poincaré[④] 与 Paul Koebe(1882—1945)[⑤]各自独立给出这一单值化定理的证明. Koebe 于是把这个结果推广到许多方面. 现在既已严密地建立了单值化定理，那就有更好的办法来处理代数函数及其积分了.

6. 代数-几何方法

代数几何研究的一个新方向开始于 1865—1870 年间 Clebsch 和 Gordan 的合作. Clebsch 不满足于只指出 Riemann 的研究对曲线的重要意义. 他现在想用曲线的代数理论来建立 Abel 积分理论. 在 1865 年他和 Gordan 合作写出了他们的《Abel 函数论》(*Theorie der Abelschen Funktionen*, 1866). 我们必须注意到，这时 Weierstrass 的更严密的 Abel 积分理论尚无人知道，而 Riemann 的基础——他的存在性证明基于 Dirichlet 原理——不仅使

---

① *Jour. für Math.*, 65, 1866, 269～283.

② *Math. Ann.*, 21, 1883, 141～218 = *Ges. Math. Abh.*, 3, 630～710.

③ *Bull. Soc. Math. de France*, 11, 1883, 112～125 = *Œuvres*, 4, 57～69.

④ *Acta Math.*, 31, 1908, 1～63 = *Œuvres*, 4, 70～139.

⑤ *Math. Ann.*, 67, 1909, 145～224.

人感到奇怪,而且还没有完善建立.而且那时对于代数型(或曲线)的不变量理论,以及对于用射影方法作为处理双有理变换的所谓第一步,都具有相当大的热情.

虽然 Clebsch 和 Gordan 的工作对代数几何作出了贡献,但并没有用纯代数理论来建立 Riemann 的 Abel 积分理论.他们诚然是用代数的与几何的方法,而不同于 Riemann 的函数论方法,但他们也用了函数论的基本结果和 Weierstrass 的函数论方法.另外他们也用了有理函数和交点定理的某些结果作为已给的事实.他们的贡献总的说来是:从一些函数论的结果出发,用代数方法获得了先前用函数论方法所建立的结果.有理变换是代数方法的精髓.

他们给出有理变换下代数曲线亏格 p 的不变性的第一个代数证明,以 $f=0$ 的次数和它的奇点个数作为 p 的定义.于是,利用 p 是 $f(x_1, x_2, x_3)=0$ 的线性无关的第一类积分的个数(而且这些积分处处有限)这一事实,他们证明变换

$$\rho x_i=\psi_i(y_1, y_2, y_3),\ i=1, 2, 3,$$

把第一类积分变到第一类积分,从而 p 是不变量.他们也给出 Abel定理的新证明(应用函数论的思想和方法).

他们的工作是不严密的.特别是他们也按照 Plücker 的传统用任意常量的个数来确定 C_m 和 C_n 的交点个数.对特殊类型的二重点没有进行研究. Clebsch-Gordan 工作对代数函数论的意义在于:用代数形式清楚表达出像 Abel 定理那样的结果,并用这种形式来研究 Abel 积分.他们把 Abel 积分和 Abel 函数理论中的代数部分放在更加突出的地位,特别是在变换本身的基础上建立了变换理论.

Clebsch 和 Gordan 提出很多问题并留下很多漏洞.所提出的问题指出了以纯粹代数理论对代数函数进行代数研究的一个新方向.用代数方法的这个研究工作由 Alexander von Brill 与 Max Noether 从 1871 年起继续进行,他们的关键性文章发表于 1874

年①. Brill和 Max Noether 的理论基于著名的留数定理,这在他们手里代替了 Abel 定理. 他们也用代数方法证明了关于代数函数 $F(w, z)$里常量个数的 Riemann-Roch 定理,这里函数 $F(w, z)$除去在 C_n 的 m 个已给点外不再变为无穷大. 根据这个定理,满足所说条件的最一般的代数函数具有形状

$$F = C_1F_1 + C_2F_2 + \cdots + C_\mu F_\mu + C_{\mu+1},$$

其中
$$\mu = m - p + \tau,$$

τ 是线性无关的函数 ϕ($n-3$ 次) 的个数,它们在 m 个已给点处为零,p 是C_n 的亏格. 例如,若 C_n 是没有二重点的C_4,则 $p=3$, 且 ϕ 都是直线. 在这种情况下,若

$$m = 1, \text{则 } \tau = 2, \text{且 } \mu = 1 - 3 + 2 = 0;$$

$$m = 2, \text{则 } \tau = 1, \text{且 } \mu = 2 - 3 + 1 = 0;$$

$$m = 3, \text{则 } \tau = 1 \text{ 或 } 0, \text{且 } \mu = 1 \text{ 或 } 0.$$

当 $\mu = 0$ 时,没有代数函数在已给点处变为无穷大. 当 $m = 3$ 时,有一个且仅有一个这样的函数,假如那三个已知点是在一直线上的话. 若三点确乎在一直线 $v = 0$ 上,则此线交 C_4 于第四个点. 选取一直线 $u = 0$ 通过这个点,则 $F_1 = u/v$.

这个工作取代了 Riemann 对在已知点变为无穷的最一般的代数函数的确定法. 再者 Brill-Noether 的成果胜过射影的观点,因其所处理的由 $f=0$ 给出的曲线 C_n 上点的几何,它们相互间的关系在一一对应双有理变换下不变. 这样就第一次从代数上证明了曲线交点定理. 计算常量个数这一方法被舍弃了.

代数几何方面的工作由 Noether② 和 Halphen③ 继续,他们详细研究了空间代数曲线. 任一空间曲线 C 能够双有理地射影变换为一个平面曲线 C_1. 由 C 所得的所有这种 C_1 都有相同的亏格. 所

---

① "Über die algebraischen Funktionen und ihre Anwendung in der Geometrie", *Math. Ann.*, 7,1874,269～310.

② *Jour. für Math.*, 93,1882,271～318.

③ *Jour. de l' Ecole Poly.*, Cahier 52,1882, 1 ～ 200 = *Œuvres*, 3,261～455.

以 C 的亏格定义为任一这种 C_1 的亏格，并且 C 的亏格在空间的双有理变换下是不变的.

多年来受到最大注意的课题是平面代数曲线的奇点的研究.直到 1871 年，代数函数的理论，从代数观点考虑的，限于研究有不同的或相离开的二重点(最坏的只是尖点)的那种曲线.对于有更复杂的奇点的曲线，人们相信可以作为具有二重点的曲线的极限情况来处理.但是实际的极限步骤是模糊的，并且缺乏严密性与统一性.奇点研究的顶峰是两个著名的变换定理.第一个定理说，每条不可约的平面代数曲线可用一个 Cremona 变换变到一条曲线，它除了有不同切线的重点外别无奇点.第二个定理断言：每条平面不可约代数曲线用只在曲线上双有理的变换，能变换成另一曲线，它只有具不同切线的二重点.曲线化简到这些简单形式，就使代数几何的一套方法容易得到应用.

然而，这些定理的许多证明，特别是第二个定理的证明，是不完整的或者至少受到数学家(除去给出证明的作者)的指责.第二个定理实际上有两种情况：射影平面中的实曲线以及复函数论意义下的曲线，其中 x 和 y 各自在一个复平面上取值.Noether① 在 1871 年用一系列在全平面上一对一的二次变换证明了第一定理.一般把这证明归功于他，实际上他只是指出一个证法，而是由许多著者加以完善并修改的②.Kronecker 应用分析与代数，建立了一个方法以证明第二定理.他把这个方法在 1858 年口头上告诉了 Riemann 和 Weierstrass，从 1870 年起用之于讲课，并在 1881 年发表了它③.这个方法使用有理变换，借助于所给平面曲线的方程，变换是一对一的，并把奇异情况变到"正则情况"；即奇点变成有相异切线的二重点.然而这结果 Kronecker 并没有叙述出来，只

① *Nachrichten König. Ges. der Wiss. zu Gött.*, 1871,267～278.

② 又参看 Noether, *Math. Ann.*, 9,1876,166～182 与 23,1884,311～358.

③ *Jour. für Math.*, 91,1881, 301 ～ 334 = *Werke*, 2,193～236.

是隐含在他的工作里.

这个第二定理的大意是,所有多重点用曲线的双有理变换能够化成二重点,它是由 Halphen 在 1884 年①首先明显叙述出来并给予证明的,许多其他证明都曾提出过,但没有一个是被普遍接受的.

7. 算术方法

研究代数曲线的方法,除去超越方法与代数-几何方法之外,还有一个方法,叫算术方法,然而它至少在概念上是纯代数的. 这个方法实际上是一批理论,它们在细节上大不相同,但在三类 Abel积分的被积函数的构造与分析上有共同之点. 这个方法是由 Kronecker 在其讲义②中,由 Weierstrass 在其 1875—1876 年的讲义中,并由 Dedekind 和 Heinrich Weber 在一篇合写的论文③中发展出来的. 这方法的完整叙述出现于 Kurt Hensel 与 Georg Landsberg 的教科书《单变量代数函数论》(*Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln*, 1902)中.

这个方法的中心思想来自 Kronecker 与 Dedekind 关于代数数的研究工作,并利用代数数域中的整代数数与复函数中在 Riemann 曲面上的代数函数之间的类比. 代数数理论是从整系数不可约多项式方程 $f(x)=0$ 出发的. 在代数几何上的类比是一个不可约多项式方程 $f(\zeta, z)=0$, 其中 ζ 乘幂的系数都是 z 的多项式(比如说是实系数的). 在数论中可以考虑由 $f(x)=0$ 的系数和它的一个根生成的域 $R(x)$. 在几何中则考虑所有 $R(\zeta, z)$形成的

---

① 重出现于 G. Salmon 的 *Higher Plane Curves* 法文版(1884)的一个附录中. 又在 E. Picard 的 *Traité d'analyse*, 2,1893,364 ff. = *Œuvres*, 4,1~93.

② *Jour. für Math.*, 91,1881,301~334 与 92,1882, 1 ~ 122 = *Werke*, 2,193~387.

③ "Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen", *Jour. für Math.*, 92,1882, 181 ~ 290 = Dedekind's *Werke*, Ⅰ, 238 ~ 350.

域,它们在 Riemann 曲面上是单值的代数函数. 于是考虑数论中的整代数数. 与此相应的代数函数 $G(\zeta, z)$是整函数,即只在 $z=\infty$ 处变为无穷大的代数函数. 整代数数能分解成实的质因子与单位,这分别相应于 $G(\zeta, z)$之能分解成只在 Riemann 曲面上一点处为零的因子和一些无处为零的因子. Dedekind 在数论中引进理想以讨论可除性,这在几何上的类比是:把 $G(\zeta, z)$的一个在 Riemann 曲面上一点处为零的因子,代之以 $R(\zeta, z)$的域中所有在该点为零的函数集合. Dedekind 与 Weber 用这种算术方法来处理代数函数域,他们得到了经典性结果.

Hilbert 继续用 Dedekind 和 Kronecker 的本质上是代数的或算术的方法进行代数几何的研究①,他的一个主要定理,Hilbert 的零点定理(*Nullstellensatz*),说:任意多个齐次变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的空间内每个任意范围的代数结构(图形),恒能用有限个齐次方程

$$F_1=0,\ F_2=0,\cdots,\ F_\mu=0$$

来表示,使得包含原来那个结构的任意其他结构的方程,都可以表成

$$M_1F_1+\cdots+M_\mu F_\mu=0,$$

其中各个 M 都是任意齐次整式,其次数必须如此选择使方程本身的左边是齐次的.

Hilbert 依 Dedekind 称 M_iF_i 的集合为模(此名词是今日的理想,而模现在稍更一般些). 于是可把 Hilbert 的结果叙述为:R_n 的每一个代数结构确定一个为零的有限模.

8. 曲面的代数几何

几乎从曲线的代数几何工作开始之时起,曲面的理论就有人

① "Über die Theorie der algebraischen Formen", *Math. Ann.*, 36,1890, 473~534 = *Ges. Abh.*, 2,199~257.

研究了.这里工作的方向也转向在线性与双有理变换下的不变量.像方程 $f(x, y)=0$ 一样,多项式方程 $f(x, y, z)=0$ 也有双重解释.若 x, y, z 取实数值,则方程代表一个三维空间的二维曲面.然而,若这些变量取复数值,则此方程代表六维空间的四维流形.

研究曲面的代数几何方法类似于研究曲线的方法. Clebsch 用函数论方法并引进[①]二重积分,相应于曲线论中的 Abel 积分. Clebsch 指出,对于有孤立多重点和寻常多重直线的 m 次代数曲面,某个 $m-4$ 次曲面应该起 $m-3$ 次伴随曲线对于 m 次曲线的作用.已给有理函数 $R(x, y, z)$,其中 x, y 和 z 由 $f(x, y, z)=0$ 相关联,如果要使二重积分

$$\iint R(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

在四维曲面的二维域上恒保持有限,则求得其形式为

$$\iint \frac{Q(x, y, z)}{f_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Q 是 $m-4$ 次多项式. $Q=0$ 是一个伴随曲面,通过 $f=0$ 的多重直线,且在 $f=0$ 的每一个 k 阶多重直线处有一个至少是 $k-1$ 阶的多重直线,以及在 f 的每个 q 阶孤立多重点处有一个至少是 $q-2$ 阶的多重点.这种积分叫做第一类二重积分.这类线性无关积分的个数,即是 $Q(x, y, z)$ 中基本常量的个数,叫做 $f=0$ 的几何亏格 p_g.如果曲面没有点的多重直线,则

$$p_g=\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{6}.$$

Max Noether[②] 与 Hieronymus G. Zeuthen(1839—1920)[③]证明 p_g 是曲面(不是全空间)在双有理变换下的一个不变式.

---

① *Comp. Rend.*, 67,1868,1238~1239.

② *Math. Ann.*, 2,1870,293~316.

③ *Math. Ann.*, 4,1871,21~49.

直到这里,曲面和曲线论的类比是好的.第一类二重积分类似于第一类 Abel 积分.但现在明显出现第一个差异.必须计算 $m-4$ 次多项式 Q(它在曲面多重点处的性态使积分保持有限)中的基本常量的个数.但只有当多项式次数 N 充分大时,才可用确切公式求得条件的个数.若将 $N=m-4$ 代入此公式,便可得不同于 p_g 的一个数.Cayley[①] 称此新数为曲面的数值(算术的)亏格 p_n.最一般的情况是 $p_n=p_g$.当等式不成立时有 $p_n<p_g$,那时曲面称为非正则的;否则称为正则的.后来 Zeuthen[②] 与 Noether[③] 证明了 p_n 在它不等于 p_g 时的不变性.

Picard[④] 发展了第二类二重积分的理论.这些是以

$$\iint\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{13}$$

那样的方式变为无穷大的积分,其中 U 和 V 是 x, y 与 z 的有理函数,且 $f(x, y, z)=0$.不相同的第二类积分的个数是有限的,这里所谓不相同的意义是指这些积分的线性组合中没有一个能化成(13)的形式,这个数是曲面 $f=0$ 的双有理不变量.但和曲线情况比就不对了,不相同的第二类 Abel 积分的个数是 $2p$.代数曲面的这个新不变量似乎与数值亏格或几何亏格没有联系.

代数曲面的研究成果远比曲线少得多.一个理由是曲面可能有的奇点要复杂得多.Picard 和 Georges Simart 有一个定理被 Beppo Levi(1875—1928)[⑤] 所证明:任何(实的)代数曲面能够双有理地变换成无奇点的曲面,然而它必须在一个五维的空间内.不过这个定理没有多大用处.

就曲线来说,单独的不变量亏格 p 能够用曲线的特征数或

---

① *Phil. Trans.*, 159, 1869, 201~229 = *Coll. Math. Papers*, 6, 329~358;和 *Math. Ann.*, 3, 1871, 526~529 = *Coll. Math. Papers*, 8, 394~397.

② *Math. Ann.*, 4, 1871, 21~49.

③ *Math. Ann.*, 8, 1875, 495~533.

④ *Jour. de Math.*, (5), 5, 1899, 5~54 及以后的文章.

⑤ *Annali di Mat.*, (2), 26, 1897, 219~253.

Riemann 曲面的连通数来定义,就 $f(x, y, z)=0$ 的情形说,还不知道算术上刻画双有理不变量的个数①. 我们不打算进一步描述曲面代数几何的少数有限成果.

代数几何的主题现在包括对高维图形(流形或簇,由一个或多个方程定义)的研究. 除了在这个方向的推广之外,还有另一类推广,即在定义方程中用更一般的系数(这些系数可以是抽象环或域中的元素),并用抽象代数的方法进行研究. 研究代数几何的方法有好几种,又因20世纪用了抽象的代数叙述,导致在用语上与研究方法上产生明显的差别,使得一类的工作者很难于了解他类的工作. 20世纪强调的是抽象代数研究方法. 看来这确实能明确表达定理与证明,从而解决了对旧结果的意义与正确性所引起的许多争论. 然而大多数研究工作似乎对代数的关系比对几何的关系更多一些.

参考书目

Baker, H. F.: "On Some Recent Advances in the Theory of Algebraic Surfaces", *Proc. Lon. Math. Soc.*, (2), 12, 1912~1913, 1~40.

Berzolari, L.: "Allgemeine Theorie der höheren ebenen algebraischen Kurven", *Encyk. der Math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1903~1915, Ⅲ C4, 313~455.

Berzolari, L.: "Algebraische Transformationen und Korrespondenzen", *Encyk. der Math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1903~1915, Ⅲ, 2, 2nd half B, 1781~2218. Useful for results on higher-dimensional figures.

Bliss, G. A.: "The Reduction of Singularities of Plane Curves by Birational Transformations", *Amer. Math. Soc. Bull.*, 29, 1923, 161~183.

Brill, A., and M. Noether: "Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen", *Jahres. der Deut. Math.-Verein.*, 3, 1892~1893, 107~565.

Castelnuovo, G., and F. Enriques: "Die algebraischen Flächen vom Gesichtspunkte

---

① 所涉及的流形是不能刻画的,甚至是不能拓扑地刻画的.

der birationalen Transformationen", *Encyk. der Math. Wiss.*, B. G. Teubner, 1903～1915, Ⅲ C6b, 674～768.

Castelnuovo, G., and F. Enriques: "Sur quelques récents résultats dans la théorie des surfaces algébriques", *Math. Ann.*, 48, 1897, 241～316.

Cayley, A.: *Collected Mathematical Papers*, Johnson Reprint Corp., 1963, Vols. 2, 4, 6, 7, 10, 1891～1896.

Clebsch, R. F. A.: "Versuch einer Darlegung und Würdigung seiner Wissenschaftlichen Leistungen", *Math. Ann.*, 7, 1874, 1～55. An article by friends of Clebsch.

Coolidge, Julian L.: *A History of Geometrical Methods*, Dover(reprint), 1963, pp. 195～230, 278～292.

Cremona, Luigi: *Opere mathematiche*, 3 vols., Ulrico Hoepli, 1914～1917.

Hensel, Kurt, and Georg Landsberg: *Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln* (1902), Chelsea(reprint), 1965, pp. 694～702 in particular.

Hilbert, David: *Gesammelte Abhandlungen*, Julius Springer, 1933, Vol. 2.

Klein, Felix: *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19 Jahrhundert*, 1, 155～166, 295～319; 2, 2～26, Chelsea(reprint), 1950.

Meyer, Franz W.: "Bericht über den gegenwärtigen Stand der Invariantentheorie", *Jahres. der Deut. Math.-Verein.*, 1, 1890～1891, 79～292.

National Research Council: *Selected Topics in Algebraic Geometry*, Chelsea(reprint), 1970.

Noether, Emmy: "Die arithmetische Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen in ihrer Beziehung zu den übrigen Theorien and zu der Zahlentheorie", *Jahres. der Deut. Math.-Verein.*, 28, 1919, 182～203.